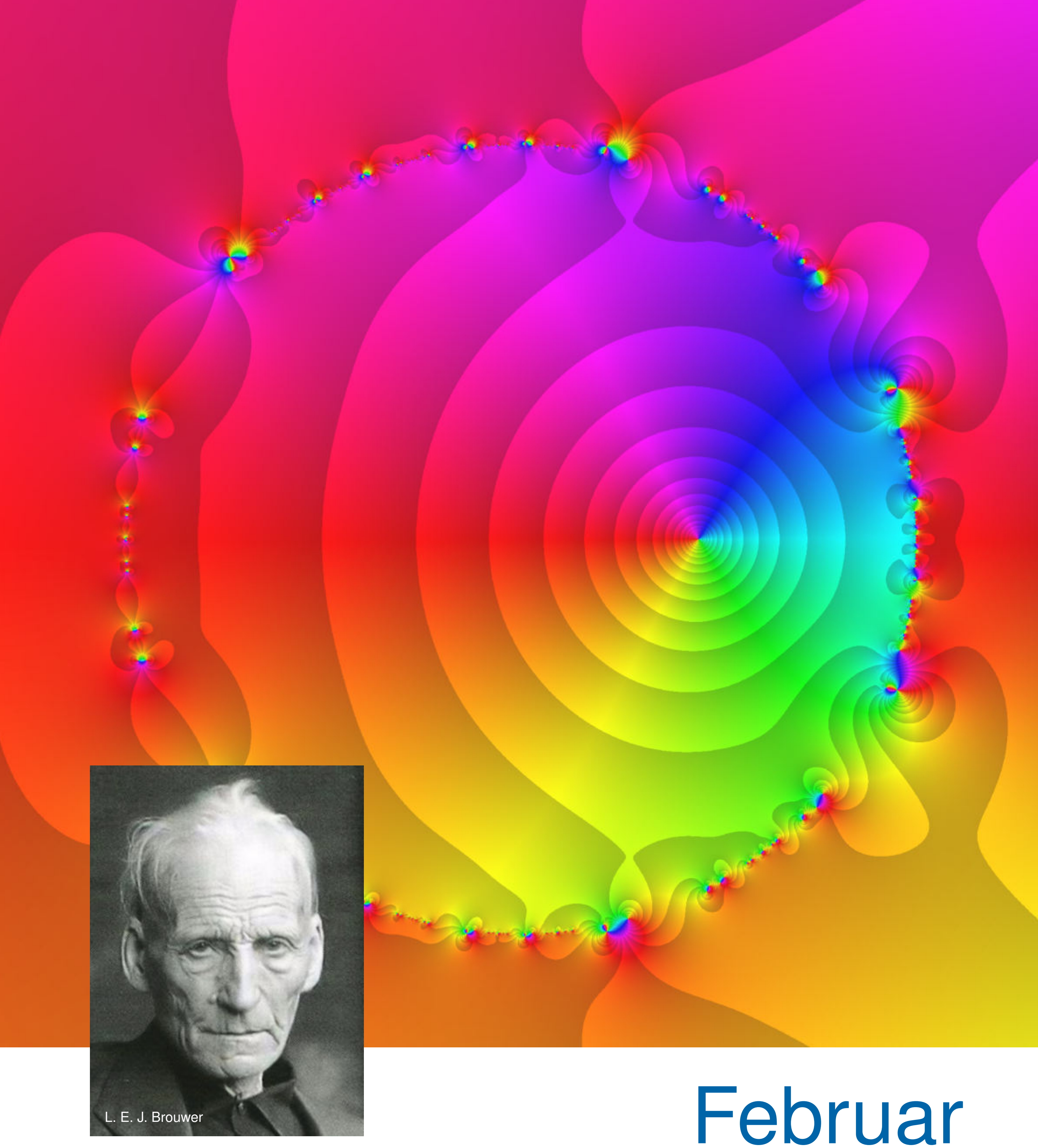


L. E. J. Brouwer

Februar

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
					1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29								

Der Fixpunktsatz von Brouwer

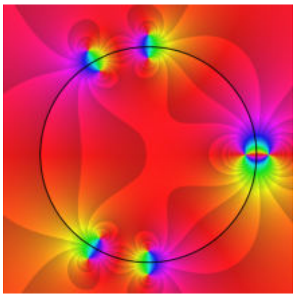
Ein Element x einer Menge X heißt *Fixpunkt* der Funktion $f : X \to X$, wenn $f(x) = x$ gilt. Fixpunkte sind in theoretischen Untersuchungen und in Anwendungen von großer Wichtigkeit. Eines der grundlegenden Resultate über die Existenz von Fixpunkten ist der *Brouwersche Fixpunktsatz*: Jede stetige Selbstabbildung einer abgeschlossenen, beschränkten und konvexen Teilmenge X eines endlichdimensionalen normierten Raumes besitzt (mindestens) einen Fixpunkt.

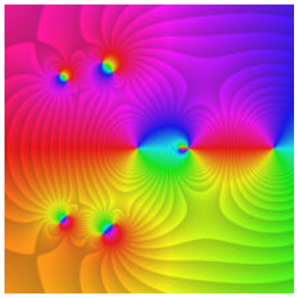
Eine berühmte Folgerung aus diesem Satz ist die Existenz eines *Nash-Gleichgewichts* in der Spieltheorie: Für jedes Mehrpersonen-Spiel (aus einer bestimmten Klasse) gibt es eine Strategie, die (in gewissem Sinn) für alle Beteiligten optimal ist.

In diesem Monat illustrieren wir eine Anwendung von Brouwers Satz auf *Blaschke-Produkte* (vgl. CB März 2012). Das Phasenporträt des Blaschke-Produkts B vom Grad 6 mit

$$B(z) = \prod (z - z_k)/(1 - \overline{z}_k z), \qquad z_k = 0.9, \quad 0.9, \quad 0.9\,\mathrm{i}, \quad -0.9\,\mathrm{i}, \quad 0.9\,\mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i}/3}, \quad 0.9\,\mathrm{e}^{4\pi \mathrm{i}/3},$$

ist in der linken Abbildung dargestellt (man beachte die doppelte Nullstelle bei $z = 0.9$). Weil Blaschke-Produkte die abgeschlossene Einheitskreisscheibe $\overline{\mathbb{D}}$ stetig in sich selbst abbilden, erfüllen sie die Voraussetzungen des Brouwerschen Satzes mit $X = \overline{\mathbb{D}}$. Tatsächlich hat B fünf Fixpunkte auf der Einheitskreislinie und einen im Inneren des Einheitskreises – ein weiterer außerhalb von $\overline{\mathbb{D}}$ ist gerade die Spiegelung des inneren Punktes an der Einheitskreislinie. Die rechte Abbildung zeigt $B(z) - z$ in einer Region, die auch den äußeren Fixpunkt sichtbar werden lässt. Die Fixpunkte von B erscheinen hier als Nullstellen.





Für Blaschke-Produkte garantiert Brouwers Satz nur die Existenz von Fixpunkten in der *abgeschlossenen* Kreisscheibe; es ist möglich, dass alle Fixpunkte auf dem Rand und keiner im Inneren des Einheitskreises liegen. Ein solches Beispiel wird im Mai dieses Jahres vorgestellt.

Das Titelbild dieses Monats ist ein Phasenporträt der Funktion $B_3(z) - z$, wobei $B_3 = B \circ B \circ B$ die dritte Iteration des oben definierten Blaschke-Produkts ist. Dies ist ein Blaschke-Produkt vom Grad 216, unter dessen Fixpunkten auch alle Fixpunkte von B vorkommen.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881 – 1966)

wurde in Overschie nahe Rotterdam in den Niederlanden geboren. Er studierte Mathematik an der Universität von Amsterdam, interessierte sich aber schon früh für Philosophie. Noch vor dem Abschluss seiner Promotion veröffentlichte er die Abhandlung *Leven, Kunst en Mystiek*.

Brouwer erzielte grundlegende Resultate in der Topologie, ist aber ebenso für seine Arbeiten zur philosophischen Begründung der Mathematik bekannt. Bereits 1909 erhielt er seine erste Anstellung an der Amsterdamer Universität. Als sein Doktorvater, Korteweg, in den Ruhestand ging, wurde Brouwer zu dessen Nachfolger berufen. Trotz mehrerer Angebote aus Göttingen, Berlin und Moskau blieb Brouwer bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1951 in Amsterdam.

Nach 1913 arbeitete Brouwer vorwiegend an der Fundierung der mathematischen Grundlagen und begründete den *Mathematischen Intuitionismus*. In dieser Philosophie können Beweise nur auf der Grundlage evidenter logischer Aussagen geführt werden. Insbesondere wird das *Prinzip des ausgeschlossenen Dritten* nicht akzeptiert. Dies hat zur Folge, dass Existenzbeweise nicht durch den Nachweis der Unmöglichkeit der Nicht-Existenz erbracht werden können. Der Brouwersche Intuitionismus akzeptiert deshalb nur konstruktive Beweise. Diese Ideen fanden unter Mathematikern nur geringe Akzeptanz und Brouwer musste viele kontroverse Diskussionen erdulden. Ungeachtet dessen wurde er in mehrere wissenschaftliche Akademien gewählt und erhielt viele Ehrungen. Einige seiner Theorien wurden im Rahmen moderner Entwicklungen wieder aufgegriffen.

Brouwer heiratete 1905, die Ehe blieb aber kinderlos. Nach seiner Emeritierung lehrte Brouwer in Südafrika, Kanada und den Vereinigten Staaten. Er starb 1966 nach einem Verkehrsunfall vor seinem Haus.

J J O'Connor and E F Robertson, L.E.J. Brouwer, MacTutor History of Mathematics, (University of St Andrews, Scotland, October 2003)