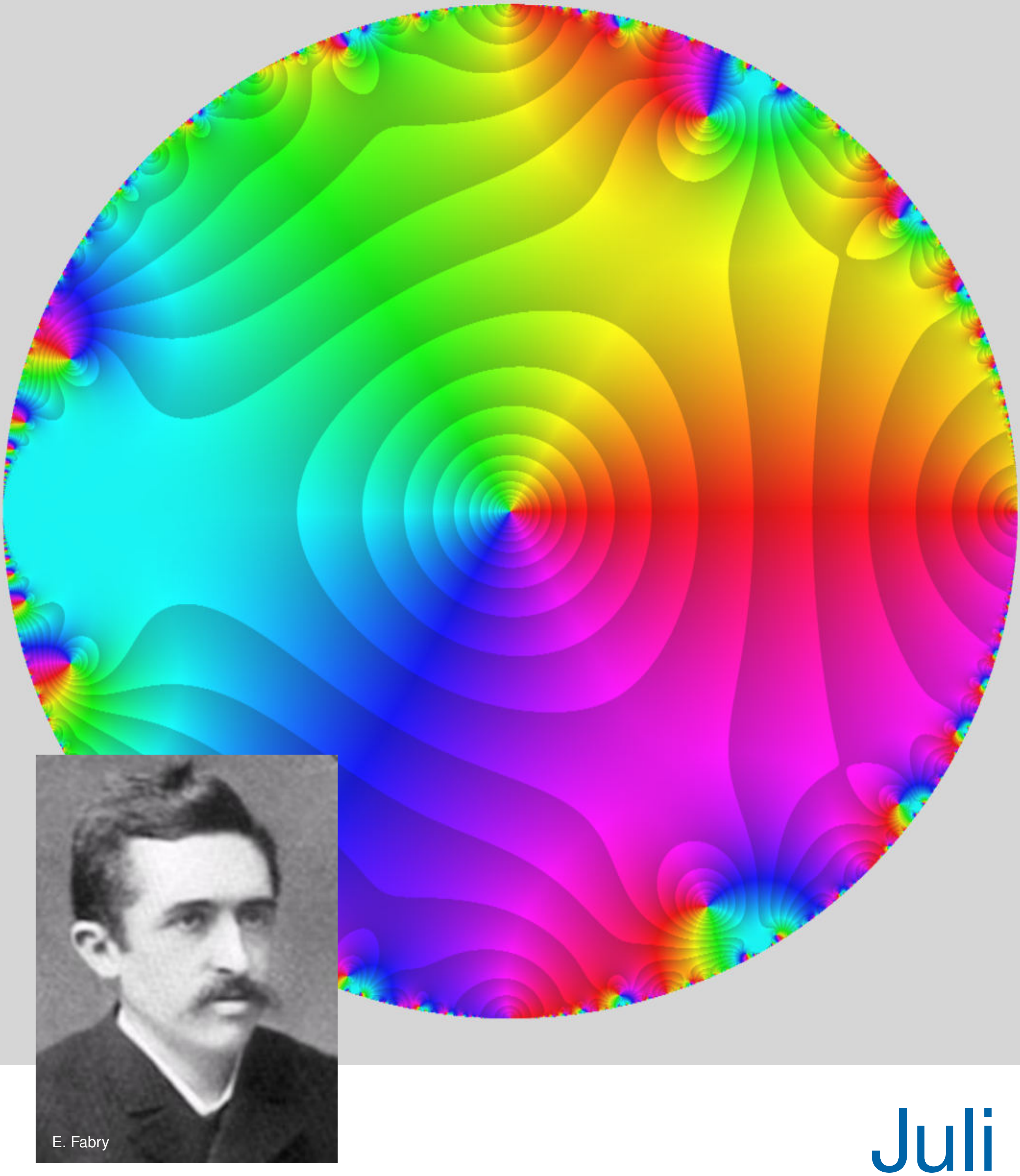


E. Fabry

Juli

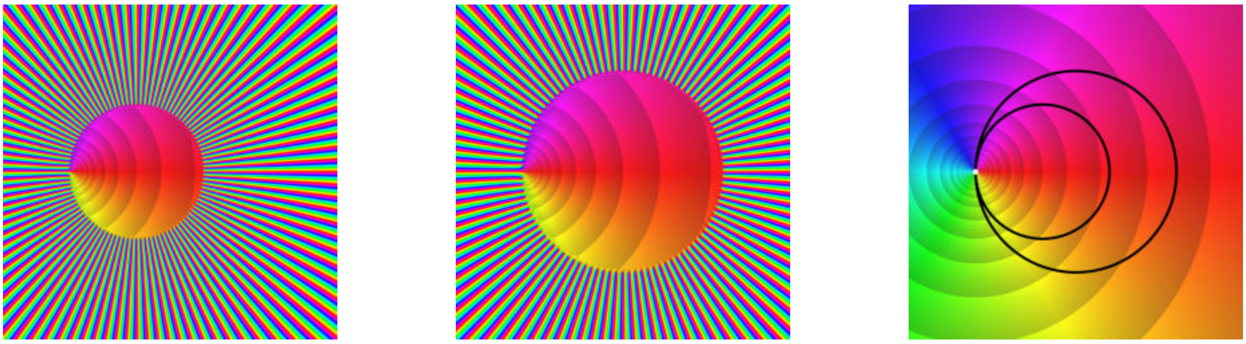
Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31									

Der Lückensatz von Fabry

Jede Potenzreihe hat einen Konvergenzkreis, in dessen Inneren sie konvergiert. Als Beispiel betrachten wir die Reihen

$$g_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (z-1)^k, \qquad g_2(z) = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{2z}{3}\right)^k.$$

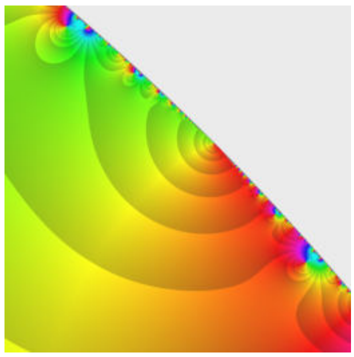
Der Konvergenzkreis der ersten Reihe ist die offene Kreisscheibe $D_1 = \{z : |z-1| < 1\}$, die zweite Reihe konvergiert im Kreis $D_2 = \{z : |z - 3/2| < 3/2\}$. Beide Reihen divergieren im Punkt $z = 0$ auf dem Rand der Kreise. Die 100-ten Partialsummen der Reihen im Quadrat $-1 \le \operatorname{Re} z \le 3$ und $-2 \le \operatorname{Im} z \le 2$ sind in der linken und der mittleren Abbildung dargestellt. Beide Reihen sind geometrische Reihen und die Berechnung ihrer Summe mit der bekannten Formel ergibt in beiden Fällen $F(z) = 1/z$; allerdings bei $g_1(z)$ für $|z-1| < 1$, während $g_2(z)$ für $|z - 3/2| < 3/2$ definiert ist. Die rechte Abbildung zeigt die Konvergenzkreise im Phasenporträt von F.



Während sich die Funktionen g_1 und g_2 also über jeden Randpunkt $z \neq 0$ der Konvergenzkreise ihrer Potenzreihe *analytisch fortsetzen* lassen, gibt es auch Reihen, für die dieser Rand eine *natürliche Grenze* darstellt, weil jeder Randpunkt eine Singularität der Summenfunktion ist. Eugène Fabry bewies 1896, dass dies für Potenzreihen der Form

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}, \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{n_k}{k} = \infty, \tag{1}$$

eintritt, deren Konvergenzkreis die komplexe Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ ist. Der Name *Lückensatz* rührt daher, dass die Koeffizientenfolge der Potenzreihe „Lücken“ besitzen muss, die wegen der Zusatzbedingung mit wachsender Potenz von z tendenziell immer länger werden. Die Funktion dieses Monats hat die Potenzreihe $f(z) = \sum_k z^{k^2}$, die Fabrys Bedingung erfüllt. Die Vergrößerung im rechten Bild lässt ahnen, dass sich die Funktion am Rand ziemlich wild verhält.



György Pólya bewies 1929 eine Umkehrung des Satzes von Fabry: Ist (n_k) eine Folge positiver ganzer Zahlen und ist der Grenzwert $\liminf n_k/k$ endlich, so gibt es eine Potenzreihe wie in (1) mit speziell gewählten Koeffizienten a_k und Konvergenzkreis $\mathbb{D}$, für die $\mathbb{T}$ *nicht* die natürliche Grenze der Summenfunktion f ist.

Eugène Fabry (1856 – 1944)

wurde in Marseille als zweites Kind einer Familie mit fünf Kindern geboren, die alle in ihren Berufen anerkannte Positionen erreichten. Der Älteste, Auguste, war Richter, ihm folgte Eugène, danach kamen Louis (ein Astronom), Charles (ein Physiker) und Pierre (ein Ingenieur). Fabry schloss zunächst 1876 in Marseille ein Ingenieurstudium ab. Danach arbeitete er als Ingenieur und unterrichtete Mathematik an verschiedenen Gymnasien. Im August 1885 wurde er in Mathematik promoviert. Ab 1886 war er an der Universität Montpellier tätig und wurde dort 1890 Professor für Mechanik. Ab 1916 war er Aufnahmeprüfer an der École Polytechnique und 1920 wurde er als Professor für Analysis an die Universität Marseille berufen. Fabry war Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Montpellier und Mitarbeiter der französischen Enzyklopädie der Mathematik.

https://de.wikipedia.org/wiki/Eug%C3%A8ne_Fabry accessed August 11, 2019.