S. D. Poisson

Juni

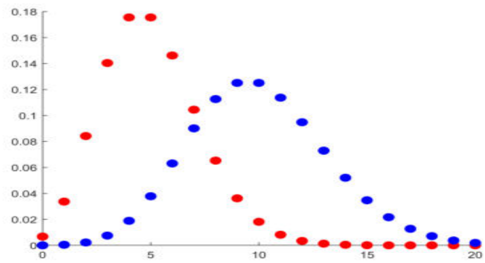
Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30												

Die Poisson-Verteilung

Betrachtet man den Zerfall kleiner Mengen radioaktiver Substanzen in Zeitintervallen, deren Länge wesentlich kleiner als die Halbwertszeit ist, so kann man annehmen, dass (i) die Wahrscheinlichkeit des Eintretens eines Zerfallsereignisses proportional zur Länge des betrachteten Zeitintervalls ist (die Zerfallsrate ist konstant) und (ii) die einzelnen Zerfallsereignisse sich gegenseitig nicht beeinflussen (die Ereignisse sind stochastisch unabhängig). Zufallsprozesse mit den Eigenschaften (i) und (ii) bezeichnet man als *Poisson-Prozesse*.

Fixiert man ein Zeitintervall und bezeichnet λ die erwartete Anzahl der Ereignisse in diesem Zeitraum (Zerfallsrate), so ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von genau k Ereignissen

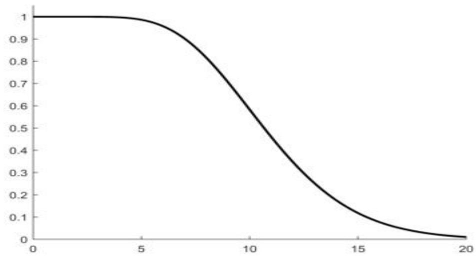
$$P_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}.$$



Die rechte Abbildung zeigt diese diskrete Funktion für die Parameterwerte $\lambda = 5$ (rot) und $\lambda = 10$ (blau).

Durch Summation der Wahrscheinlichkeiten $P_\lambda(k)$ für $k = 0, \ldots, n$ erhält man die *Verteilungsfunktion*

$$F_\lambda(n) = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!},$$



der Poisson-Verteilung, deren Werte die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten von höchstens n Ereignissen im gegebenen Zeitintervall angeben. Betrachtet man diese Funktion für festes n in Abhängigkeit von λ, beschreibt sie die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von höchstens n Ereignissen in Abhängigkeit von der Rate λ. Die rechte Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $\lambda \mapsto F_\lambda(10)$.

Das Bild des Monats ist ein Phasenporträt der „komplexifizierten" Funktion $z \mapsto F_z(n)$ für $n = 10$. Sie ist der Quotient der 10-ten Partialsumme der Taylorreihe von e^z und e^z selbst. Die Ableitung dieser Funktion hat bei $z = 0$ eine Nullstelle der Ordnung 10, was sich im sehr flachen Verlauf des Graphen der Funktion $\lambda \mapsto F_\lambda(10)$ für kleine reelle λ widerspiegelt.

Siméon Denis Poisson (1781 – 1840)

sollte auf Wunsch seines Vaters Arzt werden. Weil ihn dies nicht interessierte, brach er die Ausbildung ab und nahm 1796 ein Studium an der École Centrale in Fontainebleau auf. Ab 1798 wechselte er an die École Polytechnique in Paris, wo er mit Laplace und Lagrange bekannt wurde. Nachdem er 1800 sein Studium abgeschlossen hatte, wurde er schon 1802 zum Professor berufen; 1806 übernahm er dann den Lehrstuhl von Joseph Fourier.

Poisson veröffentlichte etwa 350 mathematische Arbeiten. Er beschäftigte sich mit den physikalischen Grundlagen von Wellen, arbeitete über Akustik, Elastizität und Wärme sowie über die elektrischen Eigenschaften von festen Körpern. In den Untersuchungen zur Wahrscheinlichkeit der Urteile in Kriminalfällen und Zivilfällen erschien 1837 erstmals die Poisson-Verteilung.

Poissons Leistungen wurden von französischen Mathematikern nur wenig gewürdigt, erfuhren aber international starke Anerkennung: Ab 1812 war Poisson korrespondierendes und ab 1830 auswärtiges Mitglied der Preußischen Akademie der Wissenschaften, 1818 wurde er Fellow der Royal Society, 1822 wurde er in die American Academy of Arts and Sciences gewählt und im Dezember 1826 wurde er Ehrenmitglied der Russischen Akademie der Wissenschaften in Sankt Petersburg.

Poissons Name ist nicht nur auf dem Eiffelturm verewigt, sondern auch mit einer Vielzahl von Konzepten und Ideen verbunden: dem Poisson-Integral, der Poisson-Gleichung in der Potentialtheorie, den Poisson-Klammern bei Differentialgleichungen, der Poisson-Transformation, dem Poisson-Verhältnis in der Elastizitätslehre und der Poisson-Konstanten in der Elektrizität. Auch ein Mondkrater und der Asteroid 12874 sind nach ihm benannt.