M. Riesz

März

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
						1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29	30	31					

Die Riesz-Funktion

Im November der Complex Beauties 2011 wurde die *Riemannsche Zeta-Funktion* vorgestellt. Sie ist zunächst für komplexe Zahlen s mit $\mathrm{Re}\, s > 1$ durch die konvergente Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-s \log n}$$

gegeben und kann davon ausgehend zu einer holomorphen Funktion in $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ analytisch fortgesetzt werden. Im Punkt $s = 1$ besitzt die Funktion eine Polstelle erster Ordnung.

Bernhard Riemann hatte 1859 gezeigt, dass die Zeta-Funktion in allen negativen geraden Zahlen Nullstellen besitzt, und die Vermutung ausgesprochen, dass alle anderen Nullstellen den Realteil $1/2$ haben. Diese *Riemannsche Vermutung* zählt heute zu den wichtigsten ungelösten Problemen.

Das kleine Bild zeigt ein Phasenporträt der Zeta-Funktion im Bereich $-40 \le \mathrm{Re}\, s \le 10$, $-2 \le \mathrm{Im}\, s \le 48$. Wir sehen die Polstelle bei $s = 1$, einige triviale Nullstellen und Nullstellen auf der *kritischen Gerade* $\mathrm{Re}\, s = 1/2$.

1916 zeigte Marcel Riesz, dass die Riemannsche Vermutung mit dem asymptotischen Verhalten der später nach ihm benannten *Riesz-Funktion*

$$\mathrm{Riesz}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!\, \zeta(2n)}\, x^n$$

zusammenhängt: Die Vermutung ist genau dann richtig, wenn für jedes $\delta > 1/4$ der Wert von $\mathrm{Riesz}(x)$ nicht schneller wächst als x^{δ}, wenn x gegen Unendlich strebt. Weil für $n \to \infty$ gilt $\zeta(2n) \to 1$, konvergiert die Potenzreihe der Riesz-Funktion in der gesamten komplexen Ebene, ihre Summe ist also eine *ganze Funktion*. Das Bild des Monats zeigt die Funktion im Bereich $-120 < \mathrm{Re}\, z < 280$, $-200 < \mathrm{Im}\, z < 200$. Zur Berechnung wurde eine alternative Darstellung der Funktion verwendet, die anstelle der Funktionswerte $\zeta(2n)$ Werte der Möbiusschen μ-Funktion nutzt. Diese Funktion wurde 1832 von August Ferdinand Möbius eingeführt und ist für positive n wie folgt definiert: $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$ falls n durch das Quadrat einer Primzahl teilbar ist, und $\mu(n) = (-1)^k$ falls n das Produkt von k verschiedenen Primzahlen ist. Mit dieser Notation gilt

$$\mathrm{Riesz}(z) = z \left(\frac{6}{\pi^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^2} \left(\mathrm{e}^{-z/n^2} - 1 \right) \right).$$

Marcel Riesz (1886 – 1969)

wurde in Ungarn geboren. Er studierte in Budapest, Göttingen und Paris. 1908 wurde er von Mittag-Leffler nach Schweden eingeladen und arbeitete bis zu seiner Emeritierung an den Universitäten in Stockholm und Lund. Zu seinen Studenten in Stockholm gehörten Olof Thorin, Harald Cramér und Einar Hille; in Lund betreute er Otto Frostman und Lars Hörmander. In seinen ersten Arbeiten beschäftigte sich Riesz mit der Summierbarkeit von Potenzreihen, trigonometrischen Reihen und Dirichlet-Reihen. In Lund begann Riesz Untersuchungen in der Potentialtheorie und über Wellenausbreitung und entwickelte Interesse an Zahlentheorie. Gemeinsam mit seinen Bruder Frigyes (Friedrich) verfasste er eine sehr einflussreiche Arbeit. Im Nachruf *Marcel Riesz in Memoriam* schreibt David Rowe: „Riesz liebte es, über Mathematik zu sprechen und hatte gern Zuhörer. Er konnte stundenlang reden, und wenn er gut in Form war, hielt er seine Zuhörer im Bann.“ Nachdem Riesz 1952 emeritiert worden war, verbrachte er mehrere Jahre in den Vereinigten Staaten und besuchte unter anderem die Universitäten von Chicago und Maryland. 1962 erlitt er einen Zusammenbruch und kehrte nach Lund zurück. Marcel Riesz war gewähltes Mitglied der Königlich Schwedischen Akademie der Wissenschaften, der Königlichen Physiographischen Gesellschaft in Lund und der Königlich Dänischen Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen.

https://en.wikipedia.org/wiki/Riesz_function und http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Riesz_Marcel.html.