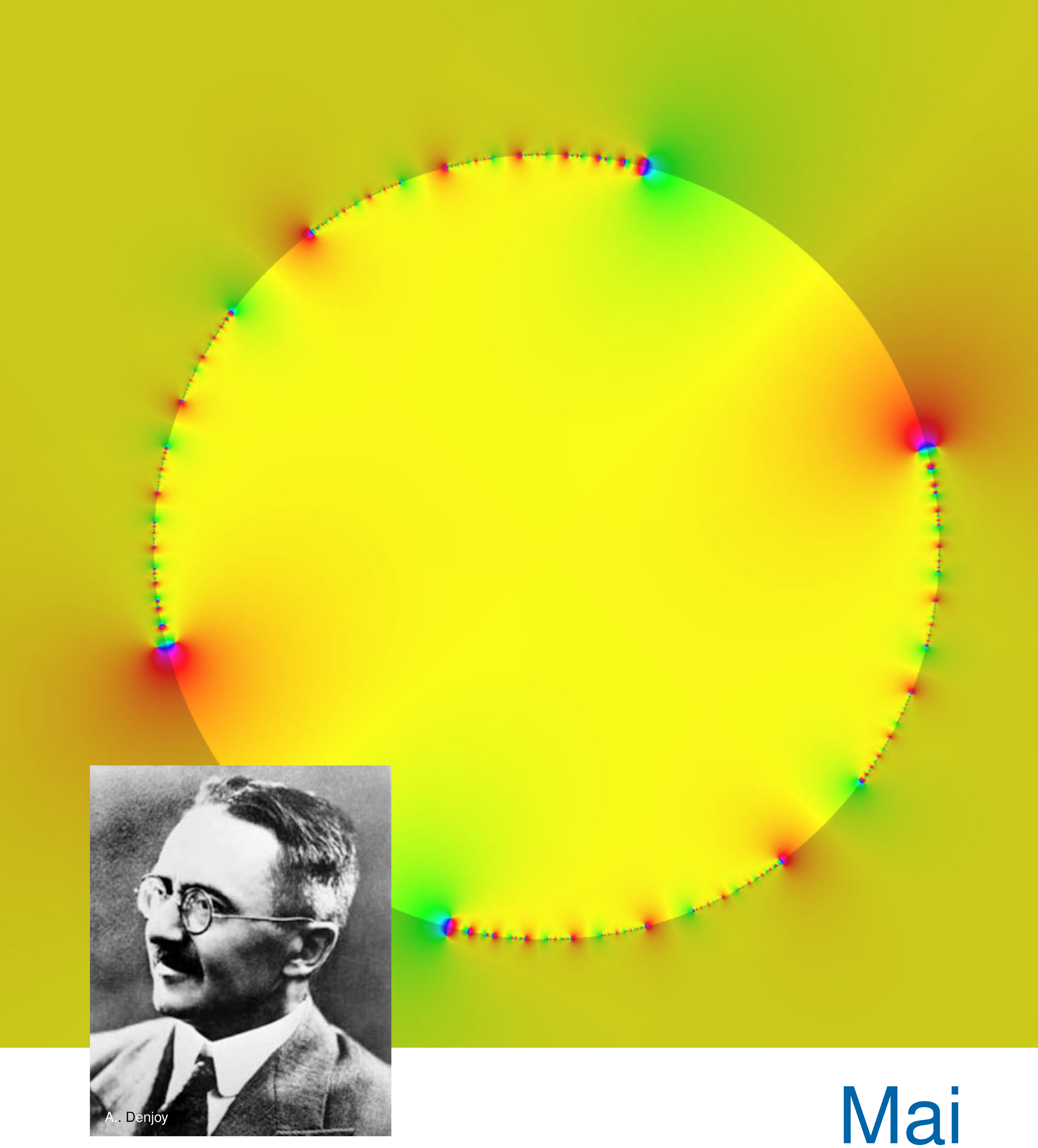


Mai

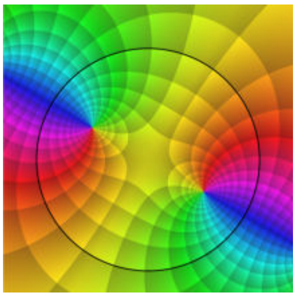
Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31							

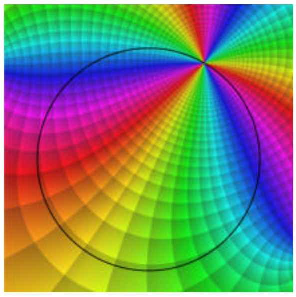
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERGAKADEMIE FREIBERG

Der Denjoy-Wolff-Punkt eines Blaschke-Produkts

Die Mathematiker *Arnaud Denjoy* aus Frankreich und *Julius Wolff* aus den Niederlanden arbeiteten 1922 gemeinsam an der Universität von Utrecht. Erst vier Jahre später bewiesen beide unabhängig voneinander einen Satz über die Grenzwerte von Iterierten bestimmter holomorpher Funktionen in der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$: Ist f eine holomorphe Abbildung von $\mathbb{D}$ in sich selbst, die kein Automorphismus mit einem Fixpunkt in $\mathbb{D}$ ist, so existiert ein (eindeutig bestimmter) Punkt ω in $\overline{\mathbb{D}}$, so dass die Iterierten $f^{(n)}$ auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathbb{D}$ gleichmäßig gegen ω konvergieren. Der Punkt ω wird heute als *Denjoy-Wolff-Punkt* der Abbildung f bezeichnet.

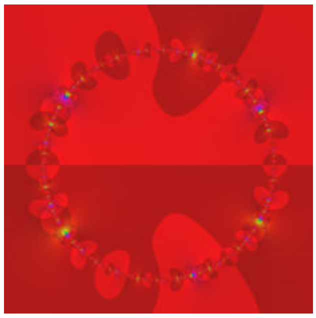
Im Titelbild dieses Monats wird der Satz von Denjoy-Wolff für ein *Blaschke-Produkt* B vom Grad 2 mit Nullstellen in $\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i}/6}/\sqrt{3}$ und $\mathrm{e}^{-5\pi\mathrm{i}/6}/\sqrt{3}$ illustriert (vgl. März 2012 für Blaschke-Produkte). Ein Phasenporträt von B ist in der linken Abbildung gezeigt. Im Phasenporträt von $B(z) - z$ in der rechten Abbildung sehen wir, dass $B(z)$ keine Fixpunkte in $\mathbb{D}$ hat. Tatsächlich liegt die einzige Nullstelle von $B(z) - z$ bei $\omega = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/3}$ gerade auf dem Rand von $\mathbb{D}$ und ist von 3. Ordnung. Aus dem Satz von Denjoy-Wolff folgt nun, dass ω der Denjoy-Wolff-Punkt von B sein muss und die Iterierten von B in $\mathbb{D}$ gegen ω konvergieren. Tatsächlich konvergieren die Iterierten $B^{(n)}(z)$ auch für $|z| > 1$ gegen ω. Das fast einfarbige Phasenporträt der 8. Iterierten auf dem Titelbild zeigt, dass die Konvergenz relativ rasch erfolgt.





Auf der Einheitskreislinie $\mathbb{T}$ konvergieren die Iterierten von B dagegen nicht überall. Weil die n-te Iterierte $B^{(n)}$ eines Blaschke-Produkts vom Grad 2 ein Blaschke-Produkt vom Grad 2^n ist, wickelt die Abbildung $z \mapsto B^{(n)}(z)$ die Einheitskreisline 2^n-mal auf sich selbst auf; jeder Punkt von $\mathbb{T}$ wird also 2^n-mal als Funktionswert angenommen. Dies lässt sich auch aus dem Phasenporträt des Monats erahnen.

Im Februar haben wir ein Blaschke-Produkt mit einem Fixpunkt im Inneren von $\mathbb{D}$ betrachtet. Es ist leicht zu sehen, dass in diesem Fall der Denjoy-Wolff-Punkt mit dem Fixpunkt übereinstimmen muss. Das rechte Bild zeigt die 8. Iteration dieser Funktion. Tatsächlich ist das Phasenporträt fast vollständig rot, was die Farbe des Fixpunktes auf der positiven reellen Achse ist.



Arnaud Denjoy (1884 – 1974)

wurde im französischen Auch als Sohn eines Weinhändlers und einer katalanischen Mutter geboren. Er besuchte zunächst die Schule in Auch und später in Montpellier, bevor er nach Paris ging. An der École Normal Supérieur gehörten Borel, Painlevé und Picard zu seinen Lehrern, die Promotion schrieb er 1909 bei René-Louis Baire. Nach Anstellungen an den Universitäten von Montpellier und Utrecht erhielt Denjoy 1922 eine Professur an der Université de Paris, wo er bis zu seiner Emeritierung 1955 tätig war. Seine bekanntesten Studenten sind Gustave Choquet und Charles Pisot. Denjoy war mit N. N. Lusin befreundet und hatte Kontakte zu Mathematikern aus dessen Schule.

Denjoy heiratete Thérèse-Marie Chevresson und hatte mit ihr drei Söhne. Zu seinen Interessen gehörten neben Philosophie, Psychologie und Sozialstudien auch Wandern und Radfahren. Als Mitglied der Radikalen Sozialistischen Partei war er für diese 1912 Stadtrat von Montpellier und ab 1920 Landrat des Departements Gers.

Denjoy verfasste einflussreiche Arbeiten zur harmonischen Analysis und zur Integrationstheorie. Mit seinen Untersuchungen von Differentialgleichungen auf dem Torus ist er einer der Mitbegründer der Theorie dynamischer Systeme. Zu seinen vielfältigen Ehrungen gehören die 1942 erfolgte Aufnahme in die Académie des Sciences (1962 wurde er deren Präsident) und Mitgliedschaften in mehreren internationalen wissenschaftlichen Akademien.

C. Cowen, B. Maccluer, Composition Operators on Spaces of Analytic Functions. *Studies in Advanced Mathematics.* CRC Press, Boca Raton, FL 1995. H. Cartan, Notice nécrologique sur Arnaud Denjoy, membre de la section de géométrie. *C. R. Acad. Sci. Paris Vie Académique* **279** (1974), 49–53.