Ausgewählte Kapitel der Analysis (WS 2009/10)
- Klausurvorbereitung -

1. Schreiben Sie die komplexe Zahl $z = \dfrac{1 - \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}}{1 + \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}\mathrm{i}}}$ in kartesischer und in polarer Form.

2. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Aussagen allgemein gültig sind (Beweis oder Gegenbeispiel):

   (a) $\partial(X \setminus A) = \partial A$, (b) $\partial(\overline{A}) = \partial A$.

3. Zeigen Sie, dass durch $d\,(x, y) := |\arctan x - \arctan y|$ auf $\mathbb{R}$ eine Metrik gegeben ist. Ist die durch $x_n := n$ gegebene Folge (x_n) eine Cauchy-Folge bezüglich dieser Metrik? Ist der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ vollständig?

4. Auf $\mathbb{R}$ sei die Abbildung $f\,(t) = \dfrac{1}{2} \arctan t$ gegeben. Ist diese Abbildung kontrahierend ? Die Folge (x_k) sei durch einen (beliebigen) Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ und die rekursive Vorschrift $x_{k+1} = f\,(x_k)$ gegeben. Begründen Sie, dass diese Folge konvergent ist und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

5. Es sei E ein linearer Raum und I sei die identische Abbildung in E. Eine lineare Abbildung $P : E \to E$ heißt Projektor, wenn $P^2 = P$ gilt. Beweisen Sie, dass dann auch $Q := I - P$ ein Projektor ist und $PQ = QP$ gilt.

6. Es sei $E := C\,[0, 1]$ der normierte Raum aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 1]$ mit der Maximumnorm. Auf E ist durch

   $$\mathrm{A}f\,(t) := t\,f\,(t)$$

   ein linearer Operator $A : E \to E$ definiert. Bestimmen Sie die Norm von A. Zeigen Sie, dass für jede reelle Zahl α mit $|\alpha| < 1$ der Operator $I - \alpha A$ invertierbar ist und geben Sie seine Inverse an. Untersuchen Sie, ob auch $I - A$ invertierbar ist.

7. Zeigen Sie, dass für beliebige reelle Zahlen a und b gilt

   $$-a^2 - b^2 \leq 2ab \leq a^2 + b^2.$$

   Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ mit $x = (x_1, x_2, x_3)^\top$ und $y = (y_1, y_2, y_3)^\top$ definieren wir

   $$(x, y) := x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + x_1 y_3 + x_3 y_1. \tag{1}$$

   Beweisen Sie, dass es sich um ein Skalarprodukt handelt. Welche der (drei möglichen Paare verschiedener) Vektoren $e_1 = (1, 0, 0)^\top$, $e_2 = (0, 1, 0)^\top$ und $e_3 = (0, 0, 1)^\top$ sind bezüglich dieses Skalarprodukts zueinander orthogonal ?

8. Weisen Sie nach, dass alle (komplexen) Fourierkoeffizienten c_k einer 2π-periodischen geraden reellwertigen Funktion reell sind.

9. Gegeben sei die Funktion

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{für } -\pi \leq t < -\frac{\pi}{2} \\ t & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } \frac{\pi}{2} \leq t < \pi \end{cases} .$$

   Berechnen Sie die komplexen und die reellen Fourierkoeffizenten von f. Gegen welchen Wert konvergiert die Fourierreihe für $t = \pi$? Erläutern Sie das Konvergenzverhalten der Fourierreihe möglichst genau.