

## Die Zylinderfunktionen

Wir betrachten die Schwingungen einer Pauke. Die Auslenkung  $v = v(t, x, y)$  des Trommelfells ist Lösung der **Wellengleichung**

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta v := \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Wir suchen Lösungen als Produkt einer zeitabhängigen und einer ortsabhängigen Funktion

$$v(x, y, t) = f(t) u(x, y)$$

Jeder Punkt soll eine **harmonische Schwingung** ausführen,

$$f(t) = \exp(i\omega t).$$

Wir erhalten für  $u$  eine **Helmholtz-Gleichung**

$$\Delta u + \omega^2 u = 0.$$

Die Frequenz  $\omega$  ist noch unbekannt und ebenfalls zu bestimmen. Zu jedem möglichen Wert von  $\omega$  sucht man dann außerdem alle zugehörigen Lösungen  $u = u(x, y)$ .

Probleme dieses Typs nennt man **Eigenwertprobleme**.

Kreisförmiges Trommelfell, Polarkoordinaten  $u = u(r, \varphi)$ ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \omega^2 u = 0.$$

Wir suchen Lösungen als Produkt  $u(r, \varphi) = g(r)h(\varphi)$ . Einsetzen

$$\frac{r^2 g''(r) + r g'(r) + r^2 \omega^2 g(r)}{g(r)} = -\frac{h''(\varphi)}{h(\varphi)} = k = \text{const},$$

Beide Seiten konstant. Zwei getrennte Differentialgleichungen

$$h''(\varphi) + c h(\varphi) = 0 \quad (1)$$

$$r^2 g''(r) + r g'(r) + (r^2 \omega^2 - c) g(r) = 0 \quad (2)$$

Die Konstante  $c$  muß so bestimmt werden, daß (1) eine  $2\pi$ -periodische Lösung besitzt. Dies gilt genau für  $c = n^2$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Zugehörige Lösungen  $h(\varphi) = \cos n\varphi$  und  $h(\varphi) = \sin n\varphi$ , komplex zusammengefasst  $h(\varphi) = \exp(in\varphi)$ . Einsetzen von  $c = n^2$  in (2),

$$r^2 g''(r) + r g'(r) + (r^2 \omega^2 - n^2) g(r) = 0. \quad (3)$$

Substitution  $x = \omega r$  ergibt für Funktion  $J$  mit  $J(\omega r) := g(r)$  die **Besselsche Differentialgleichung**

$$x^2 J''(x) + x J'(x) + (x^2 - n^2) J(x) = 0 \quad (4)$$

Ihre Lösungen heißen **Besselfunktionen**.

Weil die Ordnung der Differentialgleichung zwei ist, müssen zwei linear unabhängige Lösungen existieren. Wir suchen Lösung durch Reihenentwicklung. Dazu Potenzreihenansatz

$$J(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Einsetzen der Reihe in die Differentialgleichung (4) und Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} (1 + 2n)c_1 &= 0, \\ (2^2 + 2n \cdot 2)c_2 + c_0 &= 0, \\ (3^2 + 2n \cdot 3)c_3 + c_1 &= 0, \\ &\vdots \\ (k^2 + 2n \cdot k)c_k + c_{k-2} &= 0. \end{aligned}$$

Weil  $c_0$  frei wählbar ist, setzen wir  $c_0 = 1$ . Dann folgt

$$c_{2k-1} = 0, \quad c_{2k} = (-1)^k \frac{1}{4^k k! (n+1)(n+2) \dots (n+k)}.$$

Die erhaltene Reihe

$$J(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{4^k k! (n+1)(n+2) \dots (n+k)} \quad (5)$$

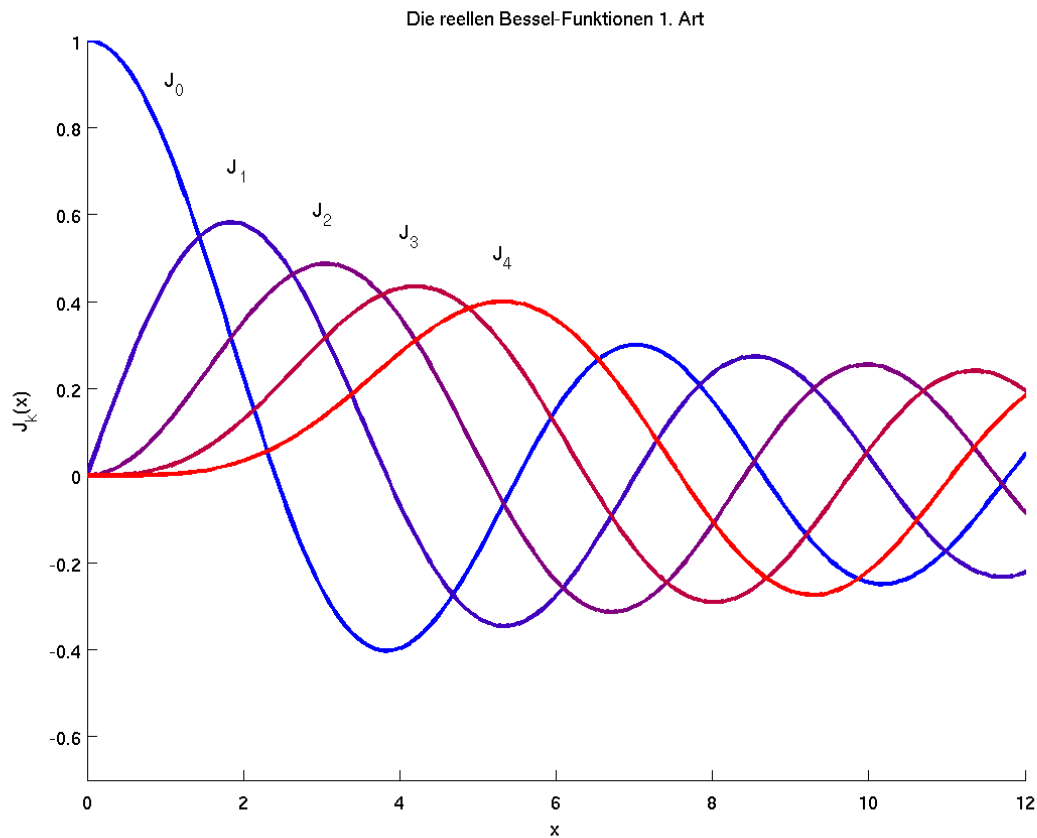
konvergiert für alle reellen  $x$ .

Üblicherweise verwendet man ein Vielfaches dieser Funktion (Division durch  $2^n n!$ ),

$$J_n(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}. \quad (6)$$

Diese Lösungen  $J_n$  der Besselschen Differentialgleichung werden **Besselfunktionen 1. Art** der Ordnung  $n$  genannt.

Die Graphen der Besselfunktionen erster Art für nichtnegative ganzzahlige Ordnungen und positives  $x$  haben folgenden Verlauf:



Um eine zweite (linear unabhängige) Lösung der Besselschen Differentialgleichung zu finden, definiert man zunächst die Besselfunktionen erster Art auch für reelle Ordnungen  $\nu$  durch

$$J_\nu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(n+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}, \quad (7)$$

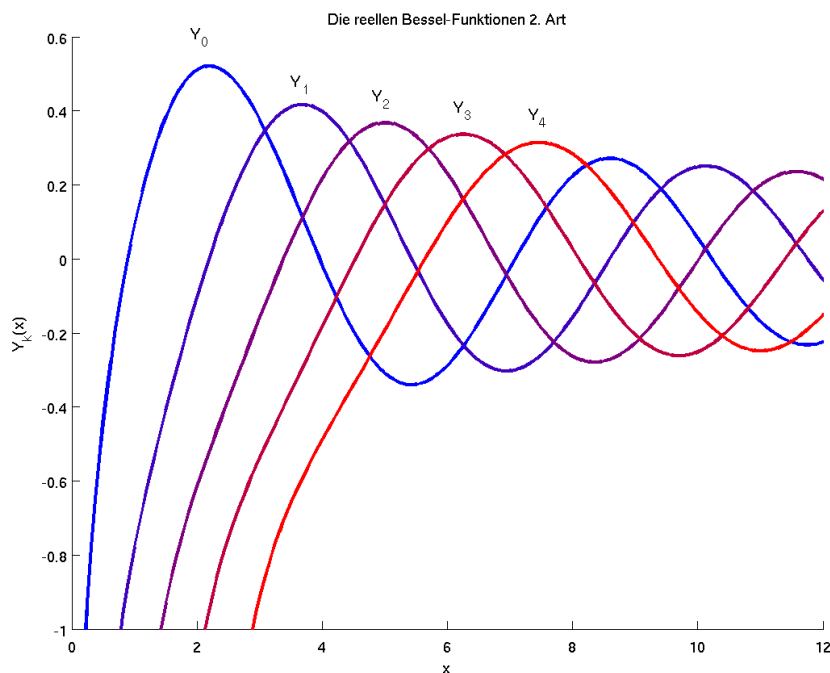
wobei  $\Gamma$  die **Eulersche Gamma-Funktion** bezeichnet. Für nichtganzzahlige  $\nu$  definiert man nun die **Besselfunktionen zweiter Art**  $Y_\nu$  (oder Neumann-Funktionen) als Linearkombination von  $J_\nu$  und  $J_{-\nu}$ ,

$$Y_\nu(z) := \frac{J_\nu(z) \cos \pi\nu - J_{-\nu}(z)}{\sin \pi\nu} \quad \text{falls } \nu \notin \mathbb{Z},$$

und bildet für  $n \in \mathbb{Z}$  die Funktionen  $Y_n$  durch Grenzübergang,

$$Y_n(z) := \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z).$$

Die Graphen der Besselfunktionen zweiter Art für ganzzahliges  $n$  haben folgenden Verlauf



Damit ist die allgemeine Lösung der Besselschen Differentialgleichung für jeden Wert von  $n$  durch

$$C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x)$$

gegeben.

Im eingangs besprochenen Beispiel sind die einzigen bei  $r = 0$  beschränkten Lösungen der Differentialgleichung (3) die Besselfunktion  $n$ -ter Ordnung

$$g_n(r) = J_n(\omega r)$$

Der Wert von  $\omega$  ist nun noch so zu bestimmen, daß die Randbedingungen des Ausgangsproblems erfüllt sind, also muß für eine am Rand  $r = 1$  eingespannte Membran (Dirichletproblem)

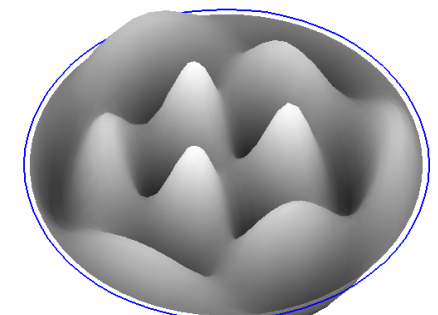
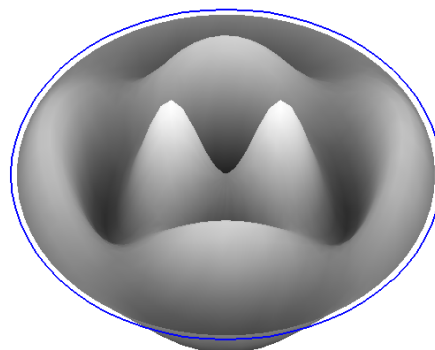
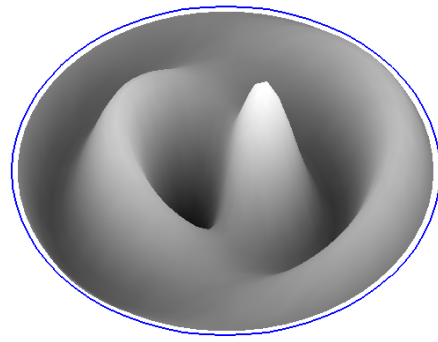
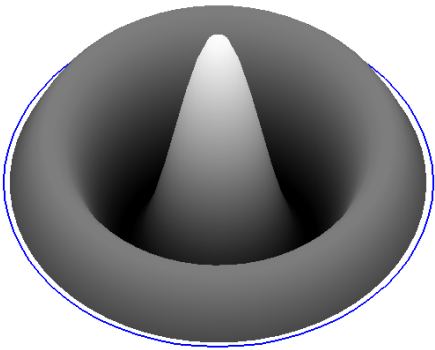
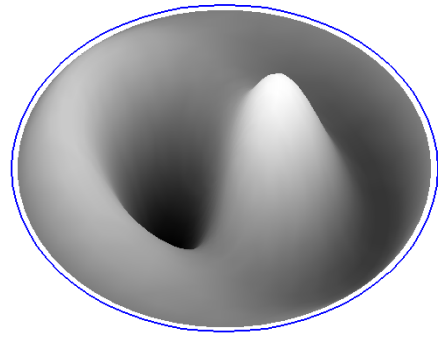
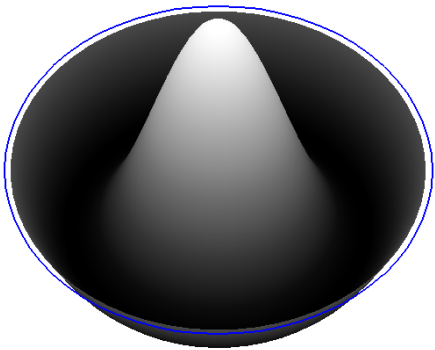
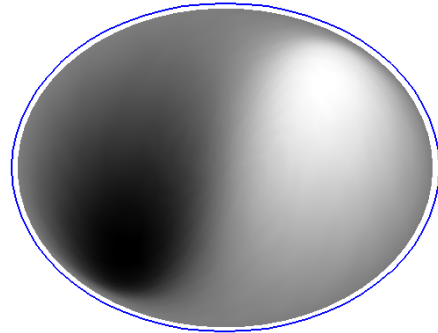
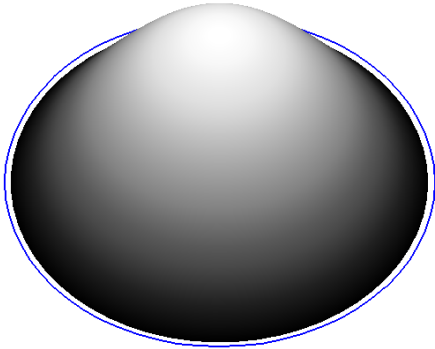
$$J_n(\omega) = 0$$

sein. Man kann zeigen, daß die Besselfunktion  $J_\nu$  für  $\nu > -1$  unendlich viele reelle Nullstellen besitzt. Dies ergibt für jedes  $n$  unendlich viele Lösungen  $\omega_{n,m}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Die entsprechenden Eigenfunktionen des Ausgangsproblems sind schließlich die Funktionen

$$u_{n,m}(r, \varphi) = \exp(in\varphi) \cdot J_n(\omega_{n,m}r). \quad (8)$$

mit den zugehörigen Eigenwerten (Frequenzen)  $\omega_{n,m}$ . Natürlich kann man die komplexe Exponentialfunktion durch sin und cos ersetzen.

Die Bilder zeigen verschiedene Schwingungsformen einer kreisförmigen am Rand eingespannten Membran.



Im Zusammenhang mit Reihenentwicklungen sind Orthogonalitätsrelationen wichtig. Besselfunktionen besitzen in einem modifizierten  $L^2$ -Raum eine Orthogonalitätseigenschaft.

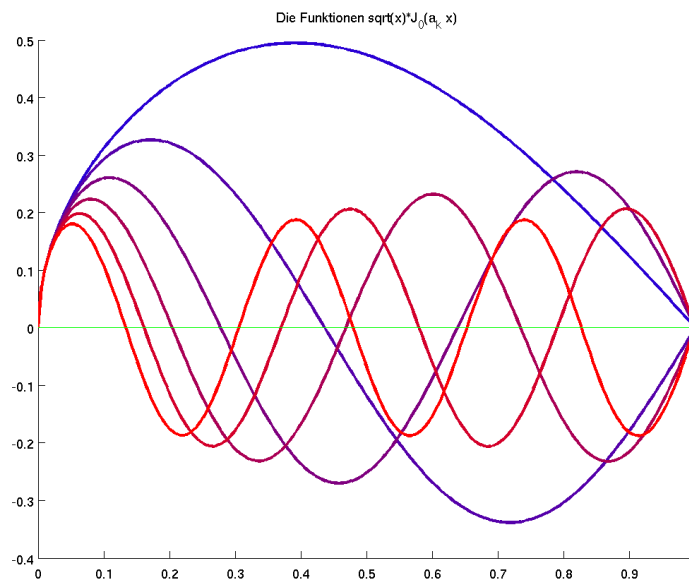
**Satz.** Sind  $p$  und  $q$  zwei verschiedene positive Nullstellen von  $J_n(x)$ , so gilt

$$\int_0^1 x J_n(px) J_n(qx) dx = 0.$$

Bezeichnet man die Nullstellen von  $J_n(x)$  mit  $\omega_{n,1}, \omega_{n,2}, \dots, \omega_{n,k}, \dots$  und setzt

$$\varphi_{n,k}(x) = \sqrt{x} J_n(\omega_{n,k}x),$$

so bilden die  $\varphi_{n,k}$  für jedes fixierte  $n$  ein Orthogonalsystem auf dem Intervall  $(0, 1)$ . Für  $n = 0$  sind die Graphen einiger Funktionen  $\varphi_{0,k}$  unten dargestellt.



Die Orthogonalitätsrelation spielt eine entscheidende Rolle bei der Entwicklung von Funktionen auf der Kreisscheibe nach Besselfunktionen.

Aus dem obigen Satz folgt, daß die Gesamtheit der Funktionen

$$u_{n,k}(r, \varphi) = \exp(in\varphi) \cdot J_n(\omega_{n,k}r).$$

ein orthogonales System auf der Einheitskreisscheibe  $\mathbb{D}$  bildet, d.h.

$$\iint_{\mathbb{D}} u_{n,k} u_{m,j} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^1 u_{n,k}(r, \varphi) u_{m,j}(r, \varphi) r dr d\varphi = 0,$$

falls nicht  $n = m$  und  $k = j$  ist. Die Gesamtheit dieser Funktionen bildet ein vollständiges System, d.h. jede quadratisch integrierbare Funktion auf der Kreisscheibe läßt sich in eine konvergente Reihe nach diesen Funktionen entwickeln. Die Abbildung zeigt die Graphen einiger Funktionen  $J_0(\omega_{0,k}r)$ .

