DIE LAPLACE-TRANSFORMATION IM KOMPLEXEN UND DIE INVERSE LAPLACE-TRANSFORMATION

OLIVER STEPAN - MATRNR. 50475

1. Faltungen und der Faltungssatz

Definition: Faltung zweier Funktionen $f, g : \Re \to \mathfrak{C}$:

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \ , \quad t \geq 0$$

Bemerkung: Bei Bedarf setzt man $f(t) = g(t) = 0$ für $t < 0$.

Folgerung: Eigenschaften von Faltungen:
(i) Kommutativität: $f * g = g * f$
(ii) Homogenität: $c(f * g) = cf * g = f * cg$
(iii) Assoziativität: $f * (g * h) = (f * g) * h$
(iv) Distributivität: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$
$(g + h) * f = (g * f) + (h * f)$

Beweis: (i) Kommutativität:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Substitution: $u = t - \tau$

$$\int_0^t f(t-u)g(u)du = (g * f)(t)$$

(ii) Homogenität:

$$c(f * g)(t) = c\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

$$= \underbrace{\int_0^t cf(\tau)g(t-\tau)d\tau}_{(cf*g)(t)} = \underbrace{\int_0^t f(\tau)cg(t-\tau)d\tau}_{(f*cg)(t)}$$

(iii) Assoziativität:

$$(f*(g*h))(t) = \int_0^t f(\tau)(g*h)(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t f(\tau)\left(\int_0^{t-\tau} g(x)h(t-\tau-x)dx\right)d\tau$$

mit $u := x+\tau$

$$= \int_0^t \left(\int_\tau^t f(\tau)g(u-\tau)h(t-u)du\right)d\tau$$

$$= \int_0^t \left(\int_0^u f(\tau)g(u-\tau)d\tau\right)h(t-u)du = ((f*g)*h)(t)$$

(iv) Linksdistributivität:

$$(f*(g+h))(t) = \int_0^t f(\tau)(g+h)(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t f(\tau)[g(t-\tau)+h(t-\tau)]d\tau$$

$$= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)+f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$= (f*g)(t) + (f*g)(t)$$

Rechtsdistributivität folgt dann aus Kommutativität.

Satz: (Faltungssatz)
Seien $F(s) = \mathscr{L}f(s)$, $G(s) = \mathscr{L}g(s)$ in Halbebene $\Re(s) > \rho$.
Dann existiert $\mathscr{L}\{f*g\}(s)$ mit
mit $\mathscr{L}\{f*g\}(s) = F(s)G(s)$.

Beweis:

$$\mathscr{L}\left\{(f*g)(t)\right\}(s) = \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau \right) e^{-st}dt$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^t f(t-\tau)g(\tau)e^{-st}d\tau \right) dt$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_\tau^\infty f(t-\tau)g(\tau)e^{-st}dt \right) d\tau$$

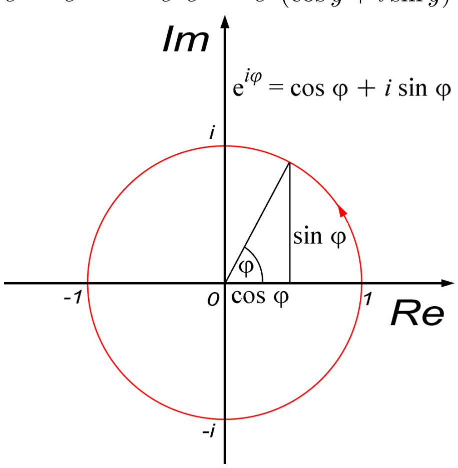
$$Substitution: \; u = t-\tau$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\int\limits_0^\infty f(u)g(\tau)e^{-s(u+\tau)}du \right) d\tau$$

$$= \int\limits_0^\infty f(u)e^{-su}du \int\limits_0^\infty g(\tau)e^{-s\tau}d\tau = F(s)G(s)$$

2. Das komplexe Laplace-Integral

Im Folgenden gelte stets $s = x + iy$,
d.h. $x = Re(s)$, $y = Im(s)$.
Damit ergibt sich aus der Eulerschen Identität:
$e^s = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$



In der Exponentialfunktion $e^{-(x+iy)t}$ wird sich y also auf ihren Drehsinn auswirken, der für $y < 0$ positiv ist, für $y > 0$ negativ. Anschaulich lässt sich noch feststellen, dass y gewissermaßen die "Drehgeschwindkeit" um Null bestimmt. x bestimmt maßgeblich die Geschwindkeit, mit der die Funktion gegen Null geht, nämlich schneller für größere x.

Folgerung: Für alle Laplace-Transformierten reeller Funktionen f gilt konjugierte Symmetrie im komplexen Bildbereich, d.h.
$F(\bar{s}) = \bar{F}(s)$
$\rightarrow Re(F(s)) = Re(F(\bar{s})),\ Im(F(s)) = -Im(F(\bar{s}))$

Beweis:

$$\int_0^\infty e^{-(x\pm iy)t} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-xt\mp iyt} f(t)dt$$

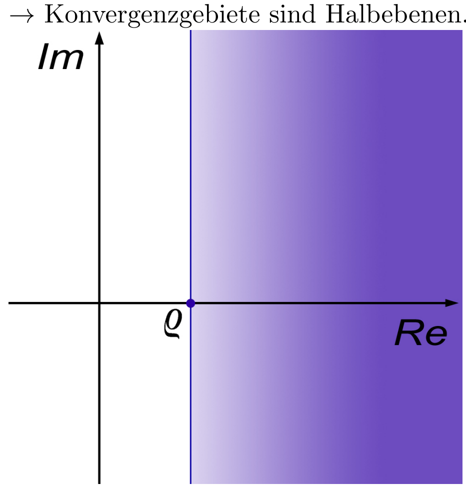
$$= \int_0^\infty e^{-xt} e^{\mp iyt} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-xt}(cos(yt) \mp isin(yt)) f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-xt} cos(yt) f(t)dt \mp \int_0^\infty e^{-xt} isin(yt) f(t)dt$$

$$= \underbrace{\underbrace{\int_0^\infty e^{-xt} cos(yt) f(t)dt}_{\in\mathfrak{R}}}_{Re(F(s))} \mp \underbrace{i \underbrace{\int_0^\infty e^{-xt} sin(yt) f(t)dt}_{\in\mathfrak{R}}}_{Im(F(s))}$$

$\rightarrow Re(F(s))$ hängt nur von Re(s) ab,
$Im(F(s))$ unterscheidet sich von $Im(F(\bar{s}))$ durch Vorzeichen.

Satz: Konvergiert $\mathscr{L}\{f\}(s)$ für s_0,
dann konvergiert sie für alle s mit $x > Re(s_0) = \rho$.
$\rightarrow$ Konvergenzgebiete sind Halbebenen.



Beweis: Folgt aus allgemeinerem Satz:

$$gilt \left| \int_0^u e^{-s_0 t} f(t)dt \right| \leq M < \infty, \quad (s_0 = \rho + iy_0)$$

für alle $0 < \infty$, dann konvergiert $\mathscr{L}\{f\}(s)$ für alle s mit $Re(s) = x > \rho$.
Setzt man

$$g(u) = \int_0^u e^{-s_0 t} f(t)dt, \ so\ ist$$

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = (s - s_0) \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} g(t)dt \qquad (*)$$

und das rechte Integral konvergiert absolut.
Zum Beweis:

$$Partielle\ Integration: \int_0^R e^{-st} f(t)dt = \int_0^R e^{-(s-s_0)t} e^{-s_0 t} f(t)dt$$

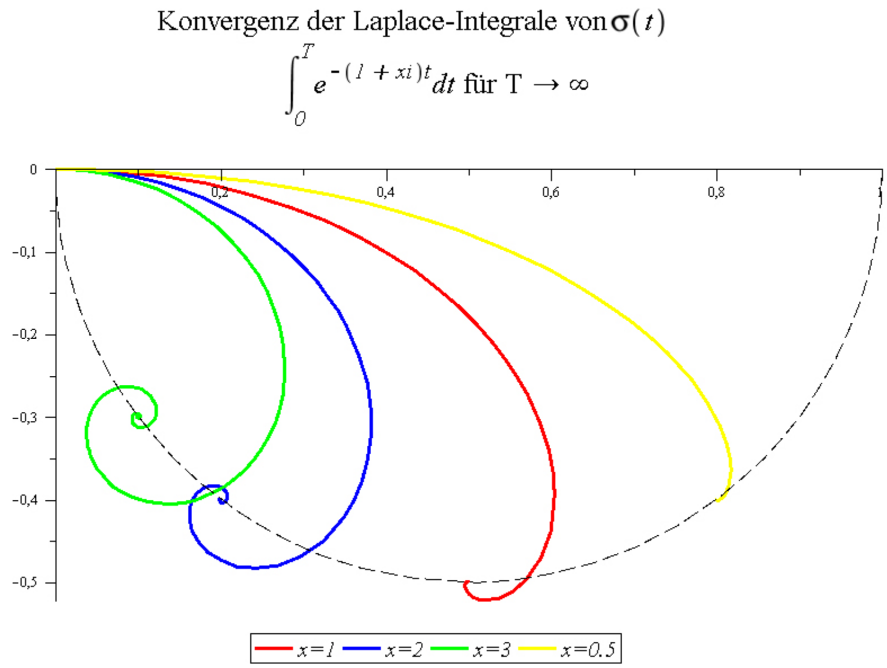
$$= e^{-(s-s_0)R} g(R) + (s - s_0) \int_0^R e^{-(s-s_0)t} g(t)dt$$

nach Voraussetzung des allgemeineren Satzes ist
$\lim\limits_{R\to\infty} e^{-(s-s_0)R} g(R) = 0$, also gilt $(*)$. Schließlich:

$$\left| \int_0^\infty e^{-(s-s_0)t} g(t)dt \right| \leq M \int_0^\infty e^{-(x-\rho)t} dt = \frac{M}{x - \rho}, \quad (x > \rho)$$

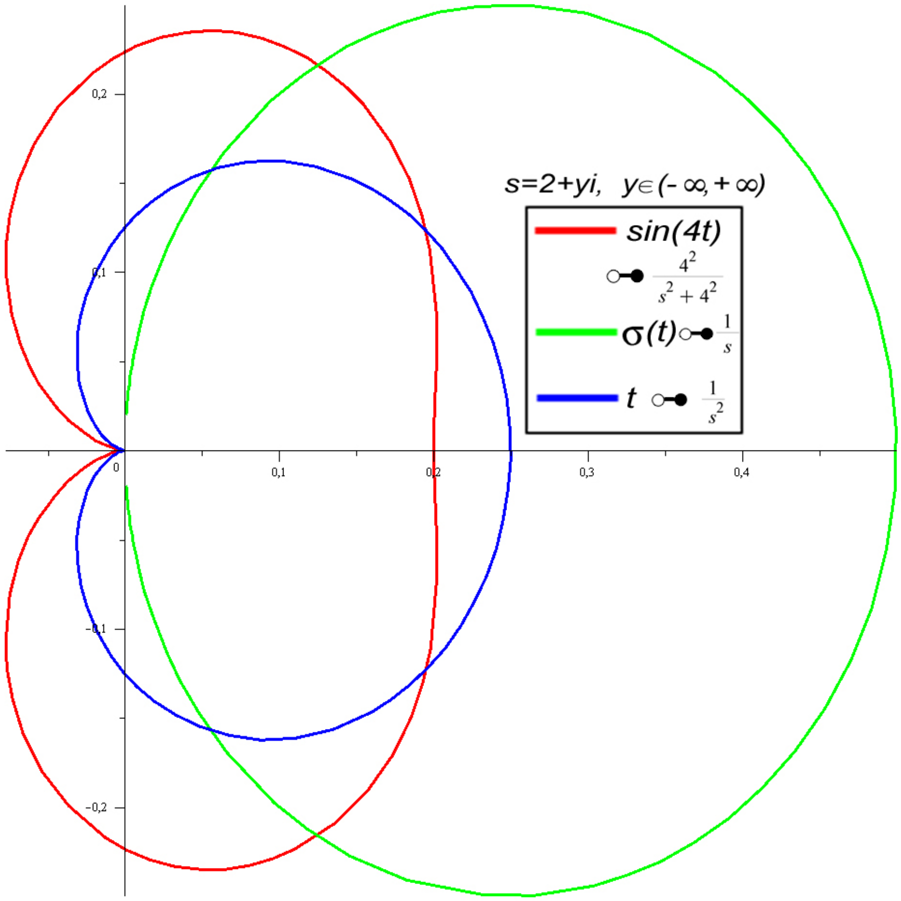
Wenn $\mathscr{L}\{f\}(s)$ für $s = s_0$ konvergiert, sind Bedingungen des allgemeinen Satzes erfüllt.

Beispiel für Konvergenzverhalten für komplexe Parameter s:



Die gestrichene Linie zeichnet hier also den Graphen von $\mathscr{L}\left\{\sigma(t)\right\}(s) = \frac{1}{s}$ für s mit $Re(s) = 1$.

Im folgenden Diagramm sind die Laplace-Transformierten drei verschiedener Funktionen mit $Re(s) = 2$ zu sehen.



Für $y = 0$ schneiden alle Graphen die reelle Achse. Die konjugierte Symmetrie findet man darin wieder, dass die Graphen an der reellen Achse gespiegelt sind.

3. Die inverse Laplace-Transformation

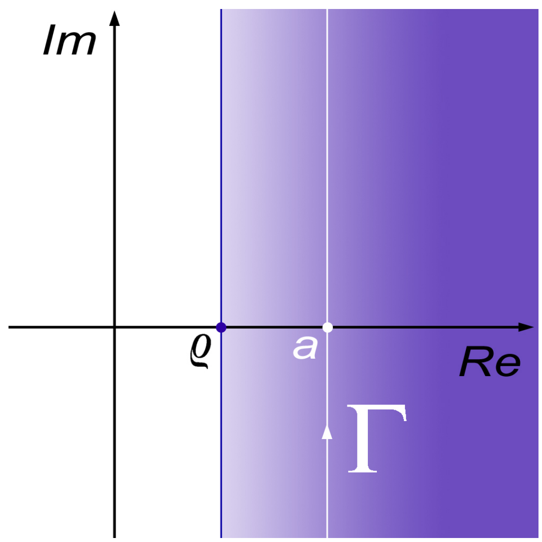
Definition:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st}F(s)ds = \begin{cases} f(t) & \text{für } t>0 \\ 0 & \text{für } t<0 \end{cases}, \quad a>\rho$$

bezeichnet man als Laplace-Rücktransformation und das Integral als Bromwich-Integral.

Bemerkung: sei $s = \gamma(u) = a + iu,\ u \in (-\infty, +\infty)$ ein Weg mit Bogen Γ. Dann lässt sich die inverse Laplace-Transformation als komplexes Wegintegral 2. Art ansehen:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{F(s)\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{st}F(s)ds$$



Da es sich um ein komplexes Wegintegral handelt, muss die Rücktransformation mit Hilfe der Funktionentheorie durchgeführt werden, weswegen die konkrete Berechnung und Herleitung hier keine Erwähnung findet.