ANWENDUNG DER LAPLACETRANSFORMATION ZUR LSG. GEW. DGL

Eva-Maria Thiemann	50942

1. Was ist eine Laplace-Transformation?

1.1. **Grundidee:**

Gesucht ist eine Möglichkeit zur Vereinfachung der Anfangswertproblematik gewöhnlicher Differentialgleichungen.
Idee:

- Aufstellen der Differentialgleichung f(t) im Originalbereich
- Transformation der Originalgleichung in Bildgleichung, wobei Anfangswerte in Bildgleichung eingehen
- Lösen der so erhaltenen algebraischen Gleichung $F(s)$
- Rücktransformation der Lösung der Bildgleichung in den Originalbereich

$$\begin{array}{ccc}
\textbf{DGL} & \overset{schwer}{\rightarrow} & \textbf{Lsg.} \\
\downarrow & & \uparrow \\
{\scriptstyle L} & & {\scriptstyle L^{-1}} \\
\downarrow & & \uparrow \\
\textbf{alg. Gl.} & \overset{einfach}{\rightarrow} & \textbf{Lsg.}
\end{array}$$

1.2. **Die Formel.**

Allgemein betrachtet ist die Laplace-Transformation zunächst eine Integral-Transformation der folgenden Form:

$$F(s) = \int_{\beta}^{\alpha} K(s,t) f(t) dt$$

`K - Kern der Transformation`
`f - gegebene Funktion`
`F - Transformierte von f bzw. Bildfunktion`

Bei geeigneter Wahl des Kerns K und der Integrationsgrenzen α, β lässt sich ein Problem, welches durch eine lineare Differentialgleichung beschrieben wird, wesentlich vereinfachen. Es existieren mehrere Integral-Transformationen, die bei verschiedensten Problemstellungen zur Anwendung kommen.
Die Laplace-Transformation ist folgendermaßen definiert:

$$(Lf)(s) = F(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t) dt \tag{1.1}$$

wobei $t \geq 0$. Durch die Verwendung des Kerns $K(s,t) = e^{-st}$ ist die Transformierte mit einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten verknüpft.

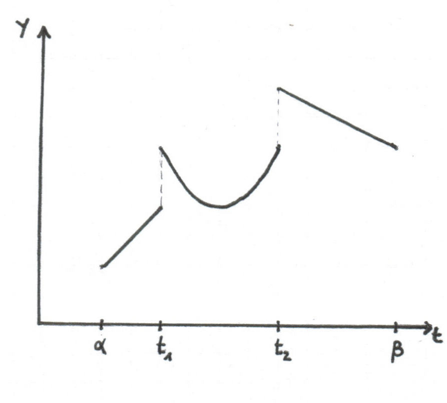
1.3. **Beispiel:**

$f(s) = 1$, $s > 0$

$$\int\limits_0^\infty e^{-st} 1 dt = \lim_{T \to \infty} \int\limits_0^T e^{-st} dt = \lim_{T \to \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^T = \lim_{T \to \infty} \left(\frac{1}{s} - \frac{e^{-sT}}{s} \right) = \frac{1}{s}$$

2. Vorraussetzungen für Existenz einer Laplace-Transformation

Def: Eine Funktion $f(t)$ heißt *stückweise stetig* auf einem Intervall $\alpha \leq t \leq \beta$, wenn das Intervall durch eine endl. Anzahl von Punkten $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_n = \beta$ unterteilt werden kann, sodass gilt:
$f(t)$ ist stetig auf jedem offenen Teilintervall $t_{i-1} < t < t_i$
$f(t)$ besitzt auf diesem Teilintervall einen rechtsseitigen- und linksseitigen Grenzwert.



$\Rightarrow f(t)$ stückw. stetig auf $\alpha \leq t \leq \beta$, wenn f innerhalb dieses Intervalls stetig ist, außer für endl. Anzahl von Sprungstellen.

Satz1: Es sei
(1) $f(t)$ stückweise stetig auf dem Intervall $0 \leq t \leq A$ für bel. pos. A
(2) $|f(t)| \leq Ke^{at}$ für $t \geq M$. In dieser Ungleichung sind K, a und M reelle Konstanten (K und M notwendiger weise positiv)
Dann existiert die durch die Gleichung (1.1) definierte Laplace-Transformation

$$(Lf)(s) = F(s)$$

für $s > a$

Bez: Funktionen, die diesen Bedingungen entsprechen, nennt man stückweise stetig und von exponentieller Ordnung für $t \to \infty$

3. Eigenschaften der Laplace-Transformation

3.1. **Konvergenz.**

Laplace-Integral ist ein uneigentl. Integral $\Rightarrow$ Es gelten die gleichen Kriterien wie für uneigentl. Integrale.
Sei $s \in \Re$, Funktion $(Lf)(s)$ konv. für mind. ein s, es existiere eine Zahl c, sodass:

$\int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)dt$	konvergiert, wenn $s > c$ divergiert, wenn $s < c$

Grenzwertsatz von Abel: Ist f: $(0, \infty) \to \Re$ eine auf jedem endlichen Intervall stückweise stetige Funktion,so gilt

$$\int\limits_0^\infty f(t)dt < \infty \Rightarrow \int\limits_0^\infty e^{-st} f(t)dt$$

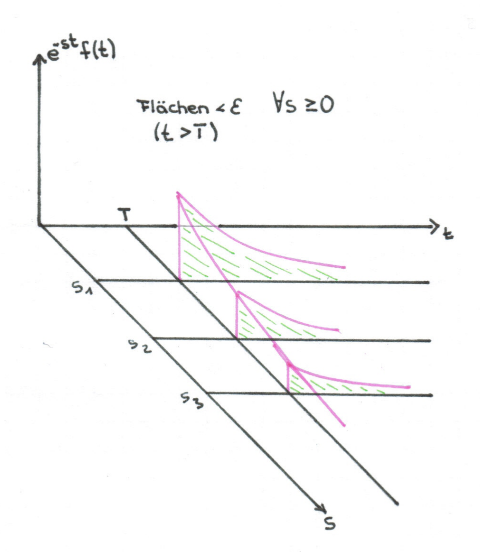
konvergiert gleichmäßig für $s \geq 0$
d.h. $\forall(\epsilon > 0) \quad \exists(T < \infty) \quad \forall(s \geq 0) \quad \left| \int\limits_T^\infty e^{-st} f(t)dt \right| < \epsilon.$

Bew: Partielle Integration:

$$u = e^{-st} \quad , \quad v' = f(t) \quad , \quad u' = -se^{-st} \quad , \quad v = \int\limits_T^t f(x)dx$$

Da $\int_0^\infty f(t)dt$ konvergiert, existiert $T < \infty$, sodass $\forall(t > T) : |v(t)| \leq \epsilon$ Damit gilt:

$$\left|\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt\right| = \left|\left[se^{-st}v(t)\right]_T^\infty + s\int_T^\infty e^{-st}v(t)dt\right| \leq |s|\,\epsilon \int_t^\infty e^{-st}dt \leq \epsilon$$



⇒ Bestimmung Konvergenz schwierig, wenn f keine Elementarfunktion.

3.2. **Linearität.**

Nehmen wir nunmehr an f_1 und f_2 seien zwei Funktionen, deren Laplace-Transformierte jeweils für $s > a_1$ und $s > a_2$ existieren. Dann gilt für s größer als das Maximum von a_1 und a_2:

$$L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)]dt = c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)dt + c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)dt$$

Folgerung: $L\{c_1 f_1 + c_2 f_2\} = c_1 L\{f_1\} + c_2 L\{f_2\}$ $(c_1, c_2 \in \Re)$
Die Laplace-Transformation ist eine lineare Transformation.

4. Regeln für Umgang mit Laplace-Transformierten

Durch den einfachen Zusammenhang zwischen Transformation von f und f' wird die Nützlichkeit der Laplace-Transformation in Verbindung mit Anfangswertproblemen klar. Unter der Voraussetzung, dass die Funktion f und ihre Ableitungen geeigneten Bedingungen genügen, kann so sogar ein Ausdruck für die Transformierte der n-ten Ableitung $f^{(n)}$ ermittelt werden:

Satz3 (Differentiationssatz): Es seien die Funktionen f, f',...,$f^{(n-1)}$ stetig und $f^{(n)}$ stückw. stetig auf einem beliebigen Intervall $0 \leq t \leq A$. Existieren weiterhin Konstanten K, a und M, sodass

$$|f(t)| \leq Ke^{at}, |f'(t)| \leq Ke^{at}, ..., \left|f^{(n-1)}(t)\right| \leq Ke^{at}$$

für $t \geq M$ gilt, dann existiert $L(f^{(n)})$ für $s > a$, sodass:

$$\begin{aligned} L(f') &= sL(f) - f(0) \\ L(f'') &= s^2L(f) - sf(0) - f'(0) \\ L(f''') &= s^3L(f) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$L(f^{(n)}) = s^nL(f) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - ... - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

Bew: induktiv: n= 1

$$L(f') = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = \lim_{t_0 \to 0} \int_{t_0}^\infty f'(t)e^{-st}dt$$

partielle Integration:

$$u = e^{-st} \quad , \quad u' = -se^{-st} \quad , \quad v' = f'(t) \quad , \quad v = f(t)$$

ergibt:

$$L(f') = \lim_{t_0 \to 0} \left\{ \left[e^{-st}f(t)\right]_{t_0}^\infty + s\int_{t_0}^\infty f(t)e^{-st}dt \right\} = -\lim_{t_0 \to 0} f(t_0) + sF(s)$$

$$\Longrightarrow L(f') = sF(s) - f(+0) \tag{4.1}$$

Gilt die Behauptung für n=k ist also:

$$L(f^{(k)}) = -(f^{(k-1)}(0) + sf^{(k-2)}(0) + ... + s^{k-1}f(0)) + s^kL(f) \tag{4.2}$$

also gilt nach (4.1):

$$L(f^{(k+1)}) = -f^{(k)}(0) + sL(f^{(k)}) \tag{4.3}$$

Einsetzen von (4.2) in (4.3) ergibt Behauptung für n=k+1

Satz4 (Ähnlichkeitssatz): Sei $F(t)$ eine Bildfunktion von f und $a > 0$

$$L\left\{f(at)\right\}(s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \quad \text{und} \quad L^{-1}\left\{F\left(\frac{s}{a}\right)\right\} = af(at)$$

Bew: Aus $L\left\{f(t)\right\} = F(s)$ folgt

$$L\left\{f(at)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(at)dt \overset{at\equiv t'}{\to} \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-\frac{s}{a}t'}f(t')dt' = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$$

also gilt: $L\left\{f\left(at\right)\right\}(s) = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$

Satz5 (Dämpfungssatz): Sei F eine Bildfunktion

$$L\left\{e^{at}f(t)\right\}(s) = F(s-a) \quad \text{und} \quad L^{-1}\left\{F(s-a)\right\} = e^{at}f(t)$$

Bew: Aus $L\left\{f(t)\right\} = F(s)$ folgt

$$L\left\{e^{at}f(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a)$$

also gilt: $L\left\{e^{at}f(t)\right\}(s) = F(s-a)$

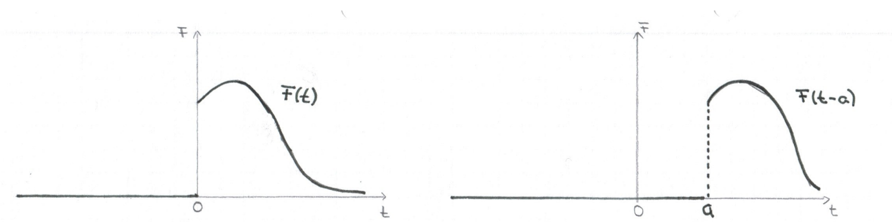
Satz6 (Verschiebungssatz): Sei F eine Bildfunktion von f und $a > 0$

$$L\left\{f(t-a)H(t-a)\right\}(s) = e^{-as}F(s) \quad \text{und} \quad L^{-1}\left\{e^{-as}F(s)\right\} = f(t-a)H(t-a)$$

Bew: Es gelte $L\left\{f(t)\right\} = F(s)$ Dabei sei $f(t) = 0$ für $t < 0$ (siehe Abbildung) Verschieben wir die Funktion um Argumentwert $a > 0$ nach rechts, wobei $f(t)$ in die Funktion $f(t-a)$ übergeht, die nun für $t - a < 0$, d.h. für $t < a$ identisch verschwindet, so folgt

$$L\left\{f(t-a)\right\} = \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)dt = \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)dt = \int_0^\infty e^{-st'}f(t')dt'$$

dabei ist t-a = t'
Es gilt damit $L\left\{f(t-a)\right\} = e^{-as}F(s)$



5. Ermittlung der Laplace-Transformierten

5.1. Beispiele.

- $f(s) = e^{at}$

$$\int_0^\infty e^{-st}e^{at}dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-(s-a)t}dt = \lim_{T\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^T = \frac{1}{s-a}$$

$(s > a)$

- $f(s) = \sin at$, $t \geq 0$

$$\int_0^\infty e^{-st}\sin(at)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-st}\sin(at)dt$$

$$\overset{part.Int.}{\to} \lim_{T\to\infty}\left[\left[-\frac{e^{-st}\cos at}{a}\right]_0^T - \frac{s}{a}\int_0^T e^{-st}\cos(at)dt\right]$$

$$\overset{part.Int.}{\to} \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}\int_0^\infty e^{-st}\sin(at)dt = \frac{1}{a} - \frac{s^2}{a^2}F(s)$$

$$F(s) = \frac{a}{s^2+a^2} \text{ , } s > 0$$

5.2. Tabellen.

$\Longrightarrow$ Berechnung sehr aufwendig. Um effizienter zu arbeiten empfiehlt es sich auf Tafeln zurückzugreifen, in denen für möglichst viele Originalfunktionen die zugehörigen Bildfunktionen schon fertig ausgerechnetvorliegen. (Verweis: Harro Heuser - Gewöhnliche Differentialgleichungen)
Hier eine kleine Auswahl:
$n \in N$

$f(t)$	$L\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$\frac{1}{(m-1)!}t^{n-1}e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$t^n \sin wt$	$\frac{in!}{2}\left(\frac{1}{(s+iw)^{n+1}}-\frac{1}{(s-iw)^{n+1}}\right)$
$t^n \cos wt$	$\frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(s+iw)^{n+1}}+\frac{1}{(s-iw)^{n+1}}\right)$
$t^n \sinh wt$	$\frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(s-w)^{n+1}}-\frac{1}{(s+w)^{n+1}}\right)$
$t^n \cosh wt$	$\frac{n!}{2}\left(\frac{1}{(s-w)^{n+1}}+\frac{1}{(s+w)^{n+1}}\right)$

Hinweis: Um nicht umständlicher Weise auf Tabellen zurückgreifen zu müssen empfiehlt es sich mit Computeralgebrasystemen wie z.B. Mathematica zu arbeiten.

6. Rücktransformation mittels Partialbruchzerlegung

$$\begin{array}{ccc} \textbf{DGL} & \overset{schwer}{\rightarrow} & \textbf{Lsg.} \\ \downarrow & & \uparrow \\ {\scriptstyle L} & & {\scriptstyle L^{-1}} \\ \downarrow & & \uparrow \\ \textbf{alg. Gl.} & \overset{einfach}{\rightarrow} & \textbf{Lsg.} \end{array}$$

6.1. Die Inverse Laplace-Transformation.

Def: Eine Funktion $n(\tau)$ heißt *Nullfunktion* genau dann, wenn:

$$\int_0^t n(\tau)d\tau = 0 \qquad (\forall t > 0)$$

Einschränkung: Zwei Funktionen, die sich nur um Nullfunktion unterscheiden werden als gleich identifiziert:

$$Lf = Lg$$
$$f = g + Nullfunktion$$

Gilt diese Einschränkung nicht, bestimmt die Originalfunktion zwar eindeutig die Bildfunktion, **aber** die Umkehrung gilt nicht, da z.B. durch die Addition einer Nullfunktion zu $f(t)$:

$$L(f + n) = L(f)$$

$\Rightarrow$ Vieldeutigkeit

Sätze:

- Es existiert eine Inverse Laplace-Transformation (bei eindeutiger Festlegung der Originalfunktion), sodass

$$L(f) = F \Rightarrow f = L^{-1}(F)$$

- 2 durchweg stetige Originalfunktionen mit derselben Laplace-Transformation sind identisch.
  In diesem Fall legt F die Originalfunktion eindeutig fest.

6.2. **Beispiel.**

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)}$$

= Ausdruck für Laplace-Transformierte Y(s) von der Lösung y=f(t) des gegebenen Anfangswertproblems: $y(0) = 1, y'(0) = 0$
$\Longrightarrow$ Schwierigkeit: Rücktransformation
Möglichkeit: Durch Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s+1} = \frac{a(s+1)+b(s-2)}{(s-2)(s+1)}$$

$$\text{Zählervergleich:} \quad s-1 = a(s+1)+b(s-2) \quad \text{(gilt für beliebige s)}$$

$$\text{setzen:} \quad s = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \quad \text{und} \quad s = -1 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{1/3}{s-2} + \frac{2/3}{s+1} = \frac{1}{3}\frac{1}{s-2} + \frac{2}{3}\frac{1}{s+1}$$

Betrachten Formel und schauen in Laplace-Tabellen

$$\Rightarrow \frac{1}{s-2} \quad \text{entspricht Grundformel} \quad \frac{1}{s-a} \Rightarrow \text{für} \quad s > a \quad f(t) = e^{2t}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s+1} \quad \text{entspricht Grundformel} \quad \frac{1}{s-a} \Rightarrow \text{für} \quad s > a \quad f(t) = e^{-t}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t} = L^{-1}(Y)$$

7. Lösung von Anfangswertproblemen

7.1. **Beispiel.**

Nun wird gezeigt, wie Anfangswertprobleme mit Hilfe der Laplace-Transformation gelöst werden können. Dies lässt sich am Einfachsten an einem Beispiel veranschaulichen:

Bsp: $y'' - y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
Bisher:
$\Rightarrow$ charakteristische Gleichung: $z^2 - z - 2 = (z-2)(z+1) = 0$
$\Rightarrow y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t}$
Also muss $c_1 + c_2 = 1$ und $-c_1 + 2c_2 = 0$ (wegen AB) gelten
$\Rightarrow c_1 = \frac{2}{3}, c_2 = \frac{1}{3}$
Lösung des Anfangswertproblems lautet also:

$$y = \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

Mittels Laplace:
Anwendung der Laplace-Transformation auf Differentialgleichung ergibt (dank Linearität):

$$L\{y''\} - L\{y'\} - 2L\{y\} = 0$$

Anwendung Differentiationssatz (um Abhängigkeit zw. $L\{y''\}$, $L\{y'\}$und $L\{y\}$ auszudrücken) ergibt:

$$s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0) - [sL\{y\} - y(0)] - 2L\{y\} = 0$$

oder
$(s^2 - s - 2)Y(s) + (1 - s)y(0) - y'(0) = 0$ mit Y(s)=L(y)
Substitution von y(0) und y'(0) durch AB und Auflösen nach Y(s) ergibt:

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2 - s - 2} = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \quad \text{entspricht Formel aus Beispiel 6.2}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

7.2. **Fazit.**

Die Partialbruchzerlegung von $Y(s)$ zur Bestimmung von $y = f(t)$ erfordert eine Faktorisierung des Nenner-Polynoms. Der Einsatz einer Laplace-Transformation verhindert daher nicht die erforderliche Berechnung der Wurzeln des charakteristischen Polynoms. Bei Gleichungen höherer als zweiter Ordnung ist dies oft ein schwieriges algebraisches Problem, besonders dann, wenn die Wurzeln irrational oder komplex sind. Die größte Schwierigkeit beim Versuch Anfangswertprobleme mit der Laplace-Methode zu lösen liegt in der Bestimmung der zugehörigen Funtion $y = f(t)$ von $Y(s)$. $y = f(t)$ wird als Inverse Transponierte korrespondierend zu $Y(s)$ bezeichnet und der Prozeß der Bestimmung von $y = f(t)$ aus $Y(s)$ ist unter dem Begirff der Rücktransformation bzw. dem Invertieren der Transformation bekannt. Es gibt eine allgemeine Formel für die Rücktransformation. Dies soll aber nicht in diesem Vortrag behandelt werden.

8. Auswertung

8.1. **Vorteile:**

- Transformierte ist algebraische Gleichung, im Gegensatz zur Differentialgleichung und lässt sich daher besser lösen
- inhomogene und homogene Gleichungen werden gleich behandelt
- es ist nicht nötig geeignete Werte für willkürliche Konstanten in allgemeiner Lösung zu finden
- Methode kann auf dieselbe Weise auf Gleichungen höherer Ordnung(soweit sie Differentiationssatz genügen), auf Systeme und Algebra-Dgl. und Gleichungen mit verschobenem Argument $t - a$ (siehe Satz6) angewandt werden

8.2. **Nachteile:**

- Schwierigkeit der Rücktransformation
- Methode nur effizient wenn man auf Tabellen zurückgreifen kann, in denen möglichst viele Originalfunktionen und zugehörige Bildfunktionen schon fertig ausgerechnet vorliegen (Ausweg: heute mittels versch. Computer-Algebrasystemen wie z.B. Mathematica möglich)
- oft führen spezielle andere Ansätze rascher zum Ziel