



Michael von Wenckstern
Proseminar Analysis
bei Prof. Dr. Wegert



Dynamik von Populationsmodellen

Gleichgewichte Stabilität Phasendiagramme

11. Januar 2010



Einleitung

Eindimensionale Dynamikanalyse von Iterationsmodellen

- Ziel

- Fixpunkte

- Populationsmodelle einer Spezies

Dynamikanalyse von autonomen linearen Differentialgleichungen

- Definitionen und Wiederholung

- Kontrahierende lineare Differentialgleichungen

- Phasendiagramme von linearen DGL mit 2 Variablen

Populationsdynamik von nicht linearen Differentialgleichungen

- Von der Idee zu Stabilitätssätzen von Fixpunkten

- Stabilitätsanalyse von Räuber-Beute-Modellen





Michael von Wenckstern
Proseminar Analysis
bei Prof. Dr. Wegert



1. Einleitung

Dynamik von Populationsmodellen

11. Januar 2010



Definition 1.1.1:

„Dynamik ist Summe von Immigration, Wachstum, Aussterben und Emigration.“

(Dr. Norman Mauder, Lehrstuhl für Botanik II, Universität Würzburg)

Definition 1.1.2:

„Population, eine Gruppe von Individuen derselben Art oder Rasse, die ein bestimmtes geographisches Gebiet bewohnen, sich untereinander fortpflanzen und über mehrere Generationen genetisch verbunden sind.“

(wissenschaft-online.de → Ökologie Umwelt → Population, Spektrum Akademischer Verlag)



Definition 1.1.3:

„Die meisten Populationen verschiedener Arten stehen in Wechselwirkung miteinander:

- Räuber-Beute-Beziehung
- interspezifische Konkurrenz
- Symbiosen
- Parasitismus“

(de.wikipedia.org/wiki/Populationsdynamik)



Definition 1.1.4:

„(Lokale) Stabilität ist die Fähigkeit eines Systems, nach einer (kleinen) Störung wieder in den Ausgangszustand zurück zukehren.“

(von Wikipedia)

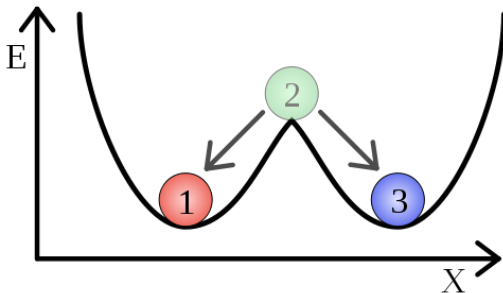


Abb. 1: Stabilität (Quelle: de.wikipedia.org/wiki/Stabilität)



Michael von Wenckstern
Proseminar Analysis
bei Prof. Dr. Wegert



2. Eindimensionale Dynamikanalyse von Iterationsmodellen

Dynamik von Populationsmodellen

11. Januar 2010



In diesem Abschnitt untersuchen wir die Grundkonzepte von dynamischen Systemen anhand von Funktionsiterationen einer reellen Variablen. Das Ziel ist es zu verstehen, wie sich die Kurve eines Punktes (Orbit) verhält, wenn man auf diesem Punkt immer wieder dieselbe Funktion anwendet:

$$\begin{aligned}x_1 &= f(x_0) \\x_2 &= f(x_1) \\&\vdots \\x_n &= f(x_{n-1})\end{aligned}$$



In diesem Unterabschnitt geht es um die Existenz von Fixpunkten:

$$f(x) = x \quad (1)$$

Für einfache Funktionen kann man die Fixpunkte herausfinden, indem man die Gleichung (1) löst. Für komplexere Funktionen funktioniert dies meistens nicht mehr.

↪ Ziel:

Finden dieser Punkte anhand der Analyse des Graphen von f .



Definition 2.2.1:

$$f^2(x) := f \circ f(x)$$

$$f^n(x) := f \circ f^{n-1}(x)$$

Wenn f invertierbar ist (f ist eine Bijektion), dann ist

$$f^{-1}(x) := \text{Inverse von } f(x)$$

$$f^{-n}(x) := (f^{-1})^n(x), n \geq 1$$

$$f^0(x) := x \text{ (Identische Abbildung)}$$

Bemerkung:

Wenn f invertierbar ist, dann bildet f^n eine abelsche Gruppe.



Definition 2.2.2:

f sei eine stetige Funktion.

- Die Vorwärtsbahn von f zu einem Punkt a ist die Menge $\mathcal{O}^+(a) := \{f^k(a) | k \geq 0\}$.
- Ist f invertierbar, dann ist die Rückwärtsbahn von f zu einem Punkt a die Menge $\mathcal{O}^-(a) := \{f^k(a) | k \leq 0\}$.
- Ist f invertierbar, dann ist die Bahn von f zu einem Punkt a die Menge $\mathcal{O}(a) := \mathcal{O}^+(a) \cup \mathcal{O}^-(a)$.

Bemerkung:

Die Vorwärtsbahn typischer Punkte entspricht dann später dem Phasendiagramm.

Definition 2.2.3:

- Ein Punkt q heißt vorwärts asymptotisch zu p , wenn:

$$|f^j(q) - f^j(p)| \rightarrow 0, \text{ für } j \rightarrow +\infty$$

- Die stabile Menge von p ist wie folgt definiert:

$$W^s(p) := \{q | q \text{ ist vorwärts asymptotisch zu } p\}$$

- Ist f invertierbar: q ist rückwärts asymptotisch zu p , wenn:

$$|f^j(q) - f^j(p)| \rightarrow 0, \text{ für } j \rightarrow -\infty$$

- Die (asymptotisch) unstabile Menge von p ist:

$$W^u(p) := \{q | q \text{ ist rückwärts asymptotisch zu } p\}$$

- Ein Punkt p heißt Liapunov-stabil (L-stabil), wenn:

$$\forall j \geq 0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : |x - p| < \delta \Rightarrow |f^j(x) - f^j(p)| < \varepsilon$$

Bemerkung:

- L-Stabilität sagt nichts weiter aus, als dass ein Punkt x , der einmal in der Nähe von p ist auch immer in der Nähe von p bleibt (egal wie oft man die Funktionsiterationen auf x anwendet).
- Wenn ein Punkt asymptotisch stabil (vorwärts asymptotisch) ist, dann ist er auch L-stabil.
- Ist ein Punkt asymptotisch stabil, dann nennt man den Punkt auch Senke / Becken.
- Ist ein Punkt asymptotisch instabil, dann nennt man ihn auch Quelle.



Beispiel 2.2.1:

$$f(x) = x^3$$

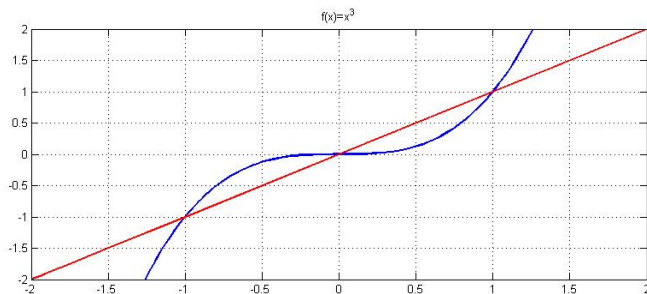


Abb. 2: $f(x) = x^3$

Beispiel (Fortsetzung)

Fixpunkte sind die Schnittpunkte von $f(x)$ mit der Geraden $y = x$.

$$\hookrightarrow x_1 = 0 \quad x_{2/3} = \pm 1$$

Im Intervall $(0; 1)$ liegt der Graph von $f(x)$ unterhalb der Geraden $y = x \Rightarrow f(x) < x \Rightarrow x > f(x) > f^2(x) > \dots > f^n(x) > 0$

$x_n := f^n(x)$ ist eine monoton fallende Folge und sie konvergiert gegen Null \rightarrow konvergiert gegen Fixpunkt.

$$\hookrightarrow (0; 1) \subseteq W^s(0) :=$$

{Menge aller Punkte die gegen Fixpunkt 0 streben, wenn $n \rightarrow \infty$ }

Beispiel (Fortsetzung)

Rückwärtsiteration:

$$y = f(x) = x^3 \Rightarrow x = y^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f^{-2}(x) = f^{-1} \circ f^{-1}(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{9}}$$

$$f^{-n}(x) = x^{\frac{1}{3^n}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{3^n}} = x^0 = 1$$

$$\hookrightarrow (0; 1) \subseteq W^u(1) \quad (2)$$

Analog gilt für das Intervall $(-1; 0)$:

$$(-1; 0) \subseteq W^s(0)$$

$$(-1; 0) \subseteq W^u(-1)$$

Beispiel (Fortsetzung)

- Da $W^s(0)$ die Umgebung von Null beinhaltet, ist der Fixpunkt Null anziehend.
- Ist x nun größer als 1, dann ist $\{f^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$ monoton steigend. Wenn die Vorwärtsbahn begrenzt wäre, würde sie gegen einen Fixpunkt streben. Da es aber keinen Fixpunkt größer eins gibt, strebt die Folge $\{f^j(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$ für alle $x > 1$ (und somit auch die Bahn) gegen $+\infty$.
- Wählt man nun die Folge $\{f^{-j}(x)\}_{j \in \mathbb{N}}$ und $x > 1$, so ist diese monoton fallend und konvergiert gegen 1.

$$\rightarrow (1, \infty) \subseteq W^u(1) \quad (3)$$

- Da nun $W^u(1)$ die Umgebung $(2, 3)$ von eins bildet und $W^s(1)$ nicht, ist der Fixpunkt 1 abstoßend \rightarrow er ist instabil.

Beispiel (Fortsetzung)

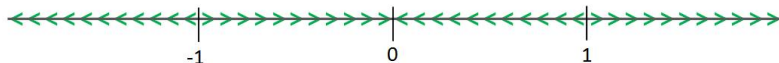


Abb. 3: Phasendiagramm für die Iterationsfolge $f(x) = x^3$

Die Pfeile verdeutlichen in welche Richtung sich ein Punkt x_0 bewegt, wenn man auf ihn die Funktion f anwendet.

Satz 2.2.1:

Ist f eine stetige Funktion von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt folgende Aussage:

- (i) Wenn x^* ein Fixpunkt mit $|f'(x^*)| < 1$ ist, dann ist x^* ein anziehender Fixpunkt. (x^* ist stabil)

Satz 2.2.2:

f sei eine stetige Funktion von $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Außerdem gelte für den Fixpunkt x^* : $|f'(x^*)| > 1$ Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) x^* ist abstoßend (instabil).
(ii) Für jedes winzig kleine Intervall I um den Punkt x^* mit $x \in I \setminus \{x^*\}$, gibt es ein $k(x)$, sodass dann $f^k(x) \notin I$.
 \hookrightarrow alle Punkte in der Nähe von x^* bewegen sich durch Anwendung der Iteration auf sie weg.

Beispiel 2.2.2:

Erneute Betrachtung des vorhergehenden Beispiels:

$$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f'(0) = 0 < 1 \quad f'(\pm 1) = 3 > 1$$

↪ Die Fixpunkte ± 1 sind abstoßend (instabil) und der Fixpunkt 0 ist anziehend (stabil).

Bemerkung:

- Diese Stabilitätsanalyse ist wesentlich einfacher und schneller als die direkte Untersuchung anhand der Def. 2.2.3.
- Aber die Sätze 2.2.1 und 2.2.2 machen nur eine Aussage über die **lokale** Stabilität, während dessen die Vorwärts- und Rückwärtsiteration Aussagen zu den Verhalten von allen Punkten machen. (**globale** Stabilitätsanalyse)



a) Gleichmäßiges Wachstum

Bakterien vermehren sich durch Zellteilung.

Eine bestimmte Bakterienart teilt sich pro Stunde einmal.

Gleichungssystem: $x_1 = 2 \cdot x_0$

$$x_n = 2 \cdot x_{n-1}$$

$$f(x) := 2 \cdot x$$

$$x_n = f^n(x_0) \quad \text{mit } n := n\text{-te Stunde}$$

Fixpunkte: $2 \cdot x = x \Leftrightarrow x = 0$

$f'(x) = 2 \Rightarrow$ Fixpunkt Null ist nicht ausgeartet
und er ist instabil.

\hookrightarrow dieses System besitzt
keinen Gleichgewichtspunkt.

b) Logistisches Wachstum

Es sei eine Vogelart gegeben, die sich nur im Frühling vermehrt.
Dabei legt jedes Vogelweibchen 5 Eier im Durchschnitt.

Der Weibchenanteil liegt bei ca. 50%.

Allerdings ist der Beervorrat begrenzt.

$$\begin{aligned} \text{Gleichungssystem: } x_1 &= 2.5 \cdot x_0 \\ x_n &= 2.5 \cdot x_{n-1} \left(1 - \frac{x_{n-1}}{700}\right) \\ f(x) &:= 2.5 \cdot x \left(1 - \frac{x}{700}\right) \\ x_n &= f^n(x_0) \end{aligned}$$

mit $n := n$ -ter
Frühling

2.3 Populationsmodelle einer Spezies III

$$\text{Fixpunkte: } \underbrace{2.5}_{x_1=0} \cdot x \underbrace{\left(1 - \frac{x}{700}\right)}_{x_2=420} = x$$

$$f'(x) = 2.5 - \frac{1}{140}x$$

$$f'(0) = 2.5 \rightarrow \text{abstoßend (lokal)}$$

$$f'(420) = -0.5 \rightarrow \text{anziehend (lokal)}$$

globale Analyse: für $0 < x < 420$ ist $f(x) > x$

↪ Iteration ist monoton wachsend und kleiner als 420.

für $x > 420$ ist $f(x) < x$

↪ Iteration ist monoton fallend und größer als 420.

↪ Das Gleichgewicht 420 ist global stabil.

↪ Nach vielen Jahren gibt es genau 420 Vögel dieser Art.



Michael von Wenckstern
Proseminar Analysis
bei Prof. Dr. Wegert



3. Dynamikanalyse von autonomen linearen Differentialgleichungen

Dynamik von Populationsmodellen

11. Januar 2010



Definition 3.1.1:

Sei $\frac{dx}{dt} = f(x)$ eine gewöhnliche Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $x(0) = x_0$, dann nennt man $\varphi^t(x_0)$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$ den Fluss einer gewöhnlichen Differentialgleichung, wenn folgendes gilt:

- $\varphi^0(x_0) = x_0$
- $\frac{d}{dt}\varphi^t(x_0) = f(\varphi^t(x_0))$

Bemerkung:

Die Menge $M := \{\varphi^t(x_0) | t \in \mathbb{R} \text{ und } t \geq 0\}$ bildet die Lösungskurve durch den Punkt x_0 für $t = 0$.

Für lineare Systeme gilt: $\varphi^t(x_0) = \Phi(t, 0) \cdot x_0$

Definition 3.1.2:

Ein Punkt $x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt Gleichgewicht (auch Ruhelage oder Equilibrium) einer gewöhnlichen Differentialgleichung, falls für die zugehörige Lösung gilt:

$$\varphi^t(x^*) = x^*$$

Bemerkung:

- Definition ist ähnlich der Definition in 2.2. (Fixpunkt einer Funktionsiteration)
- Ein Punkt x^* ist genau dann ein Gleichgewicht der gewöhnlichen Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} = f(x)$, wenn $f(x^*) = 0$ ist.

Satz 3.1.1:

Sei $\frac{dx}{dt} = Ax$ und A ist **diagonalisierbar** und konstant, dann gibt es eine Basis aus Eigenvektoren v^1, v^2, \dots, v^n , die die Matrix A in eine Diagonalform, $diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, transformieren.

Die Lösung von $\frac{dx}{dt} = Ax$ lautet dann:

$$x = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v^1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v^2 + \dots + C_n \cdot e^{\lambda_n t} \cdot v^n \quad (4)$$

Beweisidee:

Da $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ Diagonalmatrix ist, lässt sich das lin. DGL-Problem bzgl. der Eigenvektorbasis so schreiben:

$$\frac{dy}{dt} = \Lambda y$$

↪ Lässt sich in n skalare Differentialgleichungen auflösen:



Beweisidee (Fortsetzung):

$$y_1' = \lambda_1 y_1$$

$$y_2' = \lambda_2 y_2$$

...

$$y_n' = \lambda_n y_n$$

Nach Benutzung der allg. Lösungsformel für skalare lineare Differentialgleichungen, bekommt man die Lösung:

$$y = \begin{pmatrix} C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \\ \dots \\ C_n \cdot e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot e^1 + \dots + C_n \cdot e^{\lambda_n t} \cdot e^n$$

mit $\{e^1, \dots, e^n\}$ als kanonische Basis.



Beweisidee (Fortsetzung):

Macht man die Basistransformation wieder rückgängig, so lautet die Lösung für $\frac{dx}{dt} = Ax$: (4).



Satz 3.1.2:

Für jeden beliebigen Vektor x ist

$$e^{A \cdot t} \cdot x$$

eine Lösung der linearen Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} = Ax$.



Satz 3.1.3:

Ist A eine reelle konstante Matrix mit dem komplexen Eigenvektor $v = u + i \cdot w$ zum komplexen Eigenwert $\lambda = \alpha + i \cdot \beta$, $\beta \neq 0$. Dann sind

$$e^{\alpha t} [\cos(\beta t) \cdot u - \sin(\beta t) \cdot w]$$

$$e^{\alpha t} [\sin(\beta t) \cdot u + \cos(\beta t) \cdot w]$$

zwei Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung $\frac{dx}{dt} = Ax$.

Definition 3.1.3:

Ist $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Man nennt einen Fixpunkt hyperbolisch, wenn für alle Eigenwerte λ von Df_p gilt:

$$\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$$

Übertragung der Definition 2.2.3 auf Differentialgleichungen:

Definition 3.2.1:

Die Bahn des Punktes p ist Liapunov stabil (L-stabil), wenn für den Fluss der Differentialgleichung φ^t gilt:

$$\forall t \geq 0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \|x - p\| < \delta \Rightarrow \|\varphi^t(x) - \varphi^t(p)\| < \varepsilon$$

Definition 3.2.2:

Die Bahn des Punktes p heißt asymptotisch stabil, wenn folgendes gilt:

$$\exists \delta > 0 : \|x - p\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi^t(x) - \varphi^t(p)\| = 0$$

Bemerkung:

- Es gilt immer: p ist asymptotisch stabil $\Rightarrow p$ ist L-stabil.
- Für lineare Differentialgleichungen gilt:
 p ist asymptotisch stabil $\Leftrightarrow p$ ist L-stabil.

Beispiel 3.2.1:

Einfaches Räuber-Beute-Modell mit intraspezifischer Konkurrenz:

$x(t)$: Anzahl der Beutetiere zur Zeit t

$y(t)$: Anzahl der Räuber zur Zeit t

$$\dot{x} = -x - y$$

$$\dot{y} = 4x - y$$

Beispiel (Fortsetzung)

(i) Gleichgewichtspunkte:

$x^* = (0, 0)$ → bei homogenen linearen Differentialgleichungen ist der Gleichgewichtspunkt immer der Koordinatenursprung.

(ii) Berechnung der allgemeinen Lösung:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Beispiel (Fortsetzung)

Berechnung der Eigenwerte:

$$0 = \det(A - \lambda \cdot I_2) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 4 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda)^2 + 4 \Leftrightarrow (-1 - \lambda)^2 = -4$$

$$\Leftrightarrow (-1 - \lambda) = \pm 2i \Leftrightarrow -\lambda = 1 \pm 2i \Leftrightarrow \lambda = -1 \mp 2i$$

$$\hookrightarrow \lambda_1 = -1 + 2i \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -1 - 2i$$



Beispiel (Fortsetzung)

Berechnung der Eigenvektoren:

$$\begin{array}{r|l} -1 + 1 \mp 2i & -1 \\ 4 & -1 + 1 \mp 2i \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right. \quad \cdot (\pm 2i)$$

$$\begin{array}{r|l} 4 & \mp 2i \\ 4 & \mp 2i \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$\hookrightarrow y$ ist frei wählbar, setzen hier $y := 1$

$$\hookrightarrow 4x \mp 2i = 0 \Leftrightarrow 4x = \pm 2i \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{2}i$$

$$\hookrightarrow \lambda_1 \rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 \rightarrow x_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Anwendung der Sätze 3.1.1 und 3.1.3 unter Verwendung von

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} \cdot [\cos(\beta t) + i \cdot \sin(\beta t)]$$

$$\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \left[\cos(2t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(2t) \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$+ C_2 e^{-t} \left[\sin(2t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \cos(2t) \cdot \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= e^t \begin{pmatrix} -0.5 \sin(2t) & 0.5 \cos(2t) \\ \cos(2t) & \sin(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 2 \cdot 0.5 \cos(2t) & -0.5 \sin(2t) \\ 2 \cdot \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Beispiel (Fortsetzung)

In (*) Anfangsbedingung einsetzen: $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0$:

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5C_2 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5C_2 + 0C_1 \\ 0C_2 + C_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} C_2 := 2x_0 \\ C_1 := y_0 \end{matrix}$$

Somit folgt aus (*) die allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(2t) & -0.5 \sin(2t) \\ 2 \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}}_{=:M}$$

Beispiel (Fortsetzung)

(iii) Untersuchen der Stabilität

Berechnung der Matrixnorm $\|\cdot\|_\infty$:

$$\begin{aligned} \|M\|_\infty &= \sup_{x \neq 0} \frac{\|M \cdot x\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \sup_{x \neq 0} \frac{\left\| \begin{pmatrix} \overbrace{\cos(2t)x - 0.5 \sin(2t)y}^{\leq 1} \\ \underbrace{2 \sin(2t)x + \cos(2t)y}_{\leq 2} \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\|x\|_\infty} \\ &\leq \sup_{x \neq 0} \frac{\left\| \begin{pmatrix} 3x \\ 3y \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq \sup_{x \neq 0} \frac{\left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_\infty \cdot \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty}{\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_\infty} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Beispiel (Fortsetzung)

Stabilitätsabschätzung:

$$\left\| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} = \left\| e^{-t} M \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq |e^{-t}| \cdot \|M\|_{\infty} \cdot \left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_{\infty}$$

$$\hookrightarrow \|\tilde{x}\|_{\infty} \leq \underbrace{3e^{-t}}_{\substack{\text{konv. exp.} \rightarrow 0 \\ \text{für } t \rightarrow \infty}} \cdot \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right\|_{\infty}}_{\text{ist beschränkt}} \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{x}(t)\| = 0$$

Gleichgewichtspunkt $(0; 0)$ ist asymptotisch stabil. (siehe Def. 3.2.2).

\hookrightarrow der Koordinatenursprung ist global stabil.

Satz 3.2.1:

Sei A eine reelle $n \times n$ Matrix und erfüllt die Gleichung: $\dot{x} = Ax$.
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- Es gibt eine Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und Konstanten $C \geq 1$ und $\alpha > 0$, sodass für jede Anfangsbedingung $x_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\forall t \geq 0 : \|e^{At} \cdot x_0\| \leq C e^{-t\alpha} \cdot \|x_0\|$$

- Für alle Eigenwerte λ von A gilt:

$$\operatorname{Re}(\lambda) < 0$$



Folgerungen aus Satz 3.2.1 für hyperbolische Fixpunkte:

Sei $\frac{dx}{dt} = Ax$.

- Das Gleichgewicht Ursprung ist stabil \Leftrightarrow für alle EW λ der Matrix A gilt: $Re(\lambda) < 0$.
- Das Gleichgewicht Ursprung ist instabil \Leftrightarrow für einen EW λ der Matrix A gilt: $Re(\lambda) > 0$.
- Das Gleichgewicht Ursprung ist asymptotisch instabil \Leftrightarrow für alle EW λ der Matrix A gilt: $Re(\lambda) > 0$.

Sei $\frac{dx}{dt} = Ax + g(t)$ mit dem Fixpunkt p .

- Das Gleichgewicht p ist stabil (instabil) [asymptotisch instabil]
 \Leftrightarrow für alle (einen) [alle] EW λ der Matrix A gilt:

$$Re(\lambda) < 0 \quad (Re(\lambda) > 0) \quad [Re(\lambda) > 0]$$

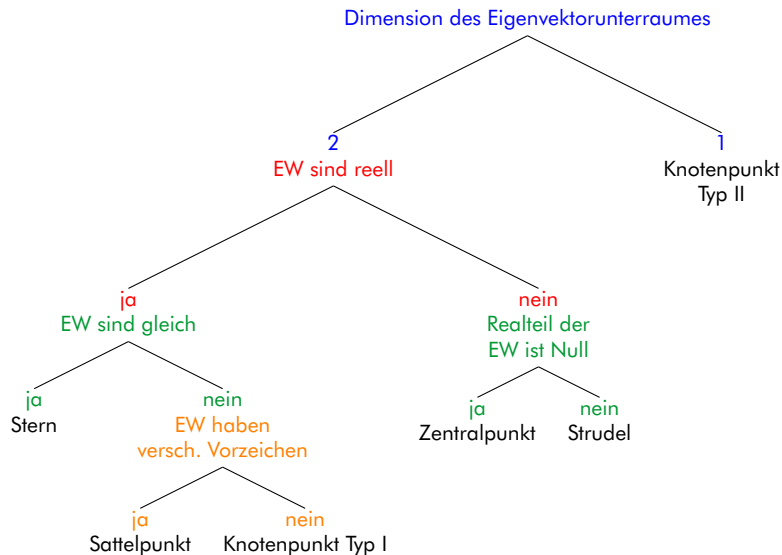
(Man definiert sich eine Fkt. $y := x - p$ und verschiebt somit das Gleichgewicht p zum Koordinatenursprung.)

Rezeptform:

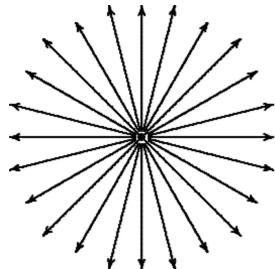
1. Lineare Differentialgleichung in die Form: $\frac{dx}{dt} = Ax$ bringen.
2. Eigenwerte von A berechnen.
3. Eigenvektoren von A berechnen.
4. Phasendiagramm vom „Entscheidungsbaum“ ablesen.



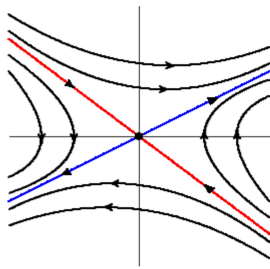
3.3 Phasendiagramme von linearen DGL mit 2 Variablen II



Phasenportraits



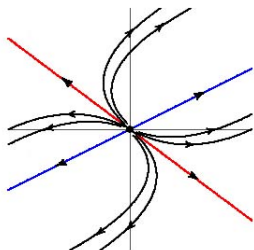
(a) Stern instabil
 $\lambda_{1,2} < 0$: stabil
 $\lambda_{1,2} > 0$: instabil



(b) Sattelpunkt instabil
immer instabil

Abb. 4: Stern und Sattelpunkt

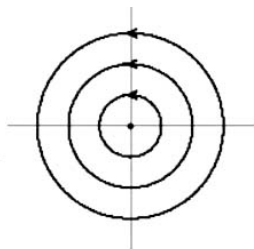
Phasenportraits



(a) Knotenpunkt Typ I in-
stabil

$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: stabil

$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$: instabil

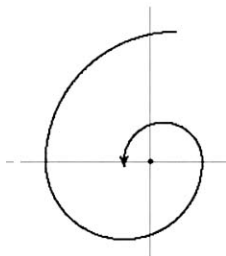


(b) Zentralpunkt neutral
stabil

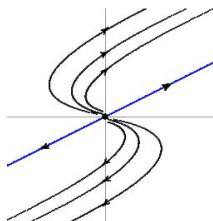
immer neutral stabil

Abb. 5: Knotenpunkt Typ I und Zentralpunkt

Phasenportraits



(a) Strudel stabil
 $Re(\lambda) < 0$: stabil
 $Re(\lambda) > 0$: instabil



(b) Knotenpunkt Typ II
instabil
 $\lambda_1 < 0$: stabil
 $\lambda_1 > 0$: instabil

Abb. 6: Strudel und Knotenpunkt Typ II

Anmerkungen zum Knotenpunkt Typ II

Es gibt nur einen Eigenvektor v^1 .

↪ Man muss Hauptvektor v^2 (Eigenvektorerersatz) berechnen:

$$Av^2 = \lambda v^2 + v^1$$

↪ allg. Lsg.:

$$x(t) = \underbrace{e^{\lambda_1 t}}_{\lambda_1 < 0 : \text{stabil}} [C_1 v^1 + C_2 (t v^1 + v^2)]$$

$\lambda_1 < 0$: stabil

$\lambda_1 \geq 0$: instabil



Michael von Wenckstern
Proseminar Analysis
bei Prof. Dr. Wegert



4. Populationsdynamik von nicht linearen Differentialgleichungen

Dynamik von Populationsmodellen

11. Januar 2010



4.1 Von der Idee zu Stabilitätssätzen von Fixpunkten I

Idee

Nicht lineare Gleichungen lassen sich oft Linearisieren mittels Frichét-Ableitungen. Anwendung der Stabilitätskriterien auf die linearisierte Gleichung.

Satz 4.1.1:

Sei $\frac{dx}{dt} = f(x)$ und alle partiellen Ableitungen von f sind stetig, dann lässt sich die (nicht lineare) Differentialgleichung in der Umgebung des Fixpunktes x^* wie folgt darstellen:

$$\dot{x} = f(x) = \underbrace{f(x^*)}_{=0} + Df_{x^*}(x - x^*) + o(\|x - x^*\|)$$

Bemerkung:

$Df_{x^*}(x - x^*)$ ist eine homogene lineare Gleichung.



Definition 4.1.1:

Ist A die Matrix der partiellen Ableitungen von f im Punkt x^* ($A := Df_{x^*}$) und x^* sei der Fixpunkt der gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$, dann nennt man x^* hyperbolisch, wenn für alle Eigenwerte λ von A gilt:

$$\operatorname{Re}(\lambda) \neq 0$$

Der Satz 4.1.2 besagt, dass der (nicht lineare) Fluss in der Nähe eines Fixpunktes x^* eine exponentielle kontrahierende Abbildung ist, wenn es der linearisierte Fluss auch ist.



Satz 4.1.2:

Sei x^* ein Fixpunkt der Gleichung $\dot{x} = f(x)$ mit $x \in \mathbb{R}^n$ und es gibt eine Konstante $\alpha > 0$, so dass für alle Eigenwerte λ von Df_{x^*} gilt:

$$\operatorname{Re}(\lambda) < -\alpha < 0$$

Dann ist folgende Aussage wahr:

- Es gibt eine Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so dass in der Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^n$ von x^* es eine Konstante $C \geq 1$ gibt, so dass für alle $t \geq 0$ die Lösung folgende Gleichung erfüllt:

$$\forall t \geq 0 : \|\varphi^t(x_0) - x^*\| \leq C \cdot e^{-t\alpha} \cdot \|x_0 - x^*\|$$

Bemerkung:

vgl. Satz 3.2.1



4.1 Von der Idee zu Stabilitätssätzen von Fixpunkten IV

Der folgende Satz besagt, dass man eine gewöhnliche Differentialgleichungslösung durch die Lösung einer linearen Differentialgleichung in der Umgebung des Fixpunktes ausdrücken kann, wenn x^* stabil ist.

Satz 4.1.3:

Sei x^* ein stabiler Fixpunkt für $\dot{x} = f(x)$, dann gibt es einen Fluss φ^t von f der gleich in der Umgebung von x^* mit dem Fluss von $x^* + e^{At}(x - x^*)$ mit $A := Df_{x^*}$ ist.

Genauer:

Es gibt einen Homomorphismus in der Umgebung U von x^* :

$$h : U \rightarrow U$$

so dass gilt

$$\varphi^t(h(x)) = h(x^* + e^{At}(x - x^*))$$

solange folgende Bedingung erfüllt ist:

$$x^* + e^{At}(x - x^*) \in U$$



Folgerungen aus den Sätzen 4.1.2/4.1.3:

- Ein hyperbolischer Fixpunkt x^* wird Senke (stabil) genannt, wenn alle Eigenwerte von Df_{x^*} negativ sind.
- Ein hyperbolischer Fixpunkt x^* wird Quelle (asymptotisch instabil) genannt, wenn alle Eigenwerte von Df_{x^*} echt positiv sind.

Bemerkung:

Ein hyperbolischer Fixpunkt x^* wird Sattel (instabil) genannt, wenn es sowohl positive als auch negative Eigenwerte von Df_{x^*} gibt.



a) Volterra-Lotka-Modell

Annahmen:

- Ohne Räuber würde die Beute exponentiell wachsen
- Räuber reduzieren Beute proportional zur Berührungswahrscheinlichkeit
- Ohne Beute würden Räuber exponentiell abnehmen
- Räuber profitieren von der Beute proportional zur Wahrscheinlichkeit des Aufeinandertreffens von Räuber und Beute

Differentialgleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= aB - bBR =: \tilde{b}(B, R) \\ \frac{dR}{dt} &= -cR + eBR =: \tilde{r}(B, R) \end{aligned} \right\} f(B, R) := \begin{pmatrix} \tilde{b}(B, R) \\ \tilde{r}(B, R) \end{pmatrix}$$



Dynamikanalyse:

1. Fixpunkte berechnen:

$$\frac{dB}{dt} = 0 \Leftrightarrow aB - bBR = 0 \Leftrightarrow \underbrace{B}_{B=0} \underbrace{(a - bR)}_{R=\frac{a}{b}} = 0$$

$$\frac{dR}{dt} = 0 \Leftrightarrow -cR + eBR = 0 \Leftrightarrow \underbrace{R}_{R=0} \underbrace{(-c + eB)}_{B=\frac{c}{e}} = 0$$

Gleichgewichte sind: $(0; 0)$, $(\frac{c}{e}; \frac{a}{b})$

2. Stabilität

a) Frechét-Ableitung berechnen

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{b}}{\partial B} = a - bR \quad \frac{\partial \tilde{b}}{\partial R} = 0 - bB \\ \frac{\partial \tilde{r}}{\partial B} = 0 + eR \quad \frac{\partial \tilde{r}}{\partial R} = -c + eB \end{array} \right\} A := Df = \begin{pmatrix} a - bR & -bB \\ eR & eB - c \end{pmatrix}$$

b) Matrizen der Gleichgewichtspunkte aufstellen

$$A_1 := A(0; 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \quad A_2 := A\left(\frac{c}{e}; \frac{a}{b}\right) = \begin{pmatrix} a - b\frac{a}{b} & -b\frac{c}{e} \\ e\frac{a}{b} & e\frac{c}{e} - c \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow A_2 := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{e} \\ \frac{ae}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

c) Eigenwerte der Matrizen von b) berechnen

$$(i) \det(A_1 - \lambda I_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = (a - \lambda)(-c - \lambda) = -ac - a\lambda + c\lambda + \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 + \lambda(c - a) - ac = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{a-c}{2} \pm \sqrt{\frac{(c-a)^2}{4} + ac} = \frac{a-c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 2ac + a^2}{4} + ac}$$

$$= \frac{a-c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 + 2ac + a^2}{4}} = \frac{a-c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c+a}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{a-c \pm (c+a)}{2}$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = a, \lambda_2 = -c \rightarrow 2$ versch. reelle EW

\Leftrightarrow dim. des Eigenvektorunterraumes = 2

$\Leftrightarrow (0; 0)$ ist Sattelpunkt (siehe 3.3) \rightarrow instabil

$$(ii) 0 = \det(A_2 - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -\frac{bc}{e} \\ \frac{ae}{b} & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 = \lambda^2 + \frac{ae}{b} \cdot \frac{bc}{e} = \lambda^2 + ac$$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = -ac \Leftrightarrow \lambda_{1/2} = \pm\sqrt{aci} \rightarrow$ 2 versch. EW mit Realteil 0
 $\hookrightarrow (\frac{c}{e}; \frac{a}{b})$ ist Zentralpunkt (siehe 3.3) \rightarrow neutral stabil

3. Dynamikergebnis:

Das Volterra-Lotka-Modell ist praxisfremd, da es keine stabilen Gleichgewichte hat.



b) Volterra-Lotka-Pielou-Modell

Annahmen:

- Ohne Räuber würde Beute logistisch wachsen
- Restlichen Annahmen sind gleich dem Volterra-Lotka-Modell

Differentialgleichungssystem:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dB}{dt} &= rB\left(1 - \frac{B}{K}\right) - bBR =: \tilde{b}(B, R) \\ \frac{dR}{dt} &= -cR + eBR =: \tilde{r}(B, R) \end{aligned} \right\} f(B, R) := \begin{pmatrix} \tilde{b}(B, R) \\ \tilde{r}(B, R) \end{pmatrix}$$

Kontrollparameter: $r, b, c, e, K > 0$

Dynamikanalyse:

1. Fixpunkte berechnen:

$$\tilde{r}(B, R) = 0 \Leftrightarrow R = 0^{(1)} \text{ oder } B = \frac{c^{(2)}}{e} \text{ (siehe 4.2a)}$$

$$\tilde{b}(B, 0^{(1)}) = rB\left(1 - \frac{B}{K}\right) = 0 \Leftrightarrow B = 0 \text{ oder } B = K$$

$$\tilde{b}\left(\frac{c^{(2)}}{e}, R\right) = r\frac{c}{e}\left(1 - \frac{c}{eK}\right) - b\frac{c}{e}R = \frac{c}{e}\left[r\left(1 - \frac{c}{eK}\right) - bR\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow r\left(1 - \frac{c}{eK}\right) = bR \Leftrightarrow R = \frac{r}{b} - \frac{rc}{beK}$$

\hookrightarrow 3 Gleichgewichtspunkte: $(0; 0)$; $(K; 0)$; $\left(\frac{c}{e}; \frac{r}{b} - \frac{rc}{beK}\right)$

2. Stabilität

a) Frechét-Ableitung berechnen

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{b}}{\partial B} = r - \frac{2r}{K}B - bR \quad \frac{\partial \tilde{b}}{\partial R} = -bB \\ \frac{\partial \tilde{r}}{\partial B} = +eR \quad \frac{\partial \tilde{r}}{\partial R} = -c + eB \end{array} \right\} A := Df = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K}B - bR & -bB \\ eR & eB - c \end{pmatrix}$$

b/c) Matrizen der Gleichgewichtspunkte aufstellen und Eigenwerte berechnen

$$(i) A_1 := A(0;0) = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(A_1 - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} r - \lambda & 0 \\ 0 & -c - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= (r - \lambda)(-c - \lambda) = -rc - r\lambda + c\lambda + \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda(c - r) - rc$$

4.2 Stabilitätsanalyse von Räuber-Beute-Modellen IX

$$\begin{aligned}\hookrightarrow \lambda_{1/2} &= -\frac{c-r}{2} \pm \sqrt{\frac{(c+r)^2}{4} + rc} = -\frac{c-r}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2 - 2rc + r^2}{4} + \frac{4rc}{4}} \\ &= -\frac{c-r}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c+r}{2}\right)^2} = \frac{r}{2} - \frac{c}{2} \pm \left(\frac{c}{2} + \frac{r}{2}\right)\end{aligned}$$

$\hookrightarrow \lambda_1 = r$ und $\lambda_2 = -c \rightarrow$ Ursprung ist Sattelpunkt und somit instabil

$$(ii) A_2 := A(K; 0) = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K} \cdot K & -bK \\ 0 & -c + eK \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}0 = \det(A_2 - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} -r - \lambda & -bK \\ 0 & -c + eK - \lambda \end{vmatrix} = (-r - \lambda)(-c + eK - \lambda) \\ &= rc - reK + r\lambda - \lambda(-c + eK) + \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda(r + c - eK) + rc - reK\end{aligned}$$



4.2 Stabilitätsanalyse von Räuber-Beute-Modellen X

$$\begin{aligned}\lambda_{1/2} &= -\frac{r+c-eK}{2} \pm \sqrt{\frac{(r+c-eK)^2}{4} - rc + reK} \\ &= -\frac{r+c-eK}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2+rc+reK+rc+c^2-ceK-reK-ceK+e^2K^2}{4} + \frac{-4rc+4reK}{4}} \\ &= -\frac{r+c-eK}{2} \pm \sqrt{\frac{r^2-2rc+2reK+c^2-2ceK+e^2K^2}{4}} \\ &= -\frac{r}{2} + \frac{c}{2} - \frac{eK}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{r-c+eK}{2}\right)^2} \\ &= -\frac{r}{2} + \frac{c}{2} - \frac{eK}{2} \pm \left(\frac{r}{2} - \frac{c}{2} + \frac{eK}{2}\right)\end{aligned}$$

↪

$$\lambda_1 = 0$$

oder $\lambda_2 = -r + c - eK$

$Re(\lambda_1) = 0 \rightarrow$ Fixpunkt $(K; 0)$ ist nicht hyperbolisch
 \rightarrow keine Stabilitätsaussage mit den Sätzen 4.1.1 / 4.1.2
möglich.

4.2 Stabilitätsanalyse von Räuber-Beute-Modellen XI

$$(iii) A_3 := A\left(\frac{c}{e}; \frac{r}{b} - \frac{rc}{beK}\right) = \begin{pmatrix} r - \frac{2r}{K} \cdot \frac{c}{e} - b\left(\frac{r}{b} - \frac{rc}{beK}\right) & -b\frac{c}{e} \\ e\left(\frac{r}{b} - \frac{rc}{beK}\right) & -c + e \cdot \frac{c}{e} \end{pmatrix}$$

$$0 = \det(A_3 - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -\frac{rc}{Ke} - \lambda & -\frac{bc}{e} \\ \frac{er}{b} - \frac{rc}{bK} & 0 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \left(-\frac{rc}{Ke} - \lambda\right)(-\lambda) - \left(-\frac{er}{b} \cdot \frac{bc}{e} + \frac{rc}{bK} \cdot \frac{bc}{e}\right) = \lambda^2 + \lambda\frac{rc}{Ke} + rc - \frac{rc^2}{Ke}$$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{rc}{2Ke} \pm \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{rc}{Ke}\right)^2 - rc + \frac{rc^2}{Ke}}}$$

Wenn der Wurzel Ausdruck negativ wird,
dann ist der Realteil von $\lambda_{1/2} < 0$ und
das Gleichgewicht ist stabil

$$\frac{1}{4} \cdot \left(\frac{rc}{Ke} \right)^2 - rc + \frac{rc^2}{Ke} \leq 0 \quad (7)$$

$$\frac{r^2c^2}{4K^2e^2} - \frac{4K^2e^2rc}{4K^2e^2} + \frac{4Kerc^2}{4Ke^2} \leq 0$$

$$\frac{rc(rc - 4K^2e^2 + 4Kec)}{4K^2e^2} \leq 0 \quad \text{sind } > 0 \text{ (siehe Annahme)}$$

$$\Leftrightarrow rc - 4K^2e^2 + 4Kec \leq 0$$

\Leftrightarrow Berechnen Nullstellen:

$$K^2(-4e^2) + K(4ec) + rc = 0 \quad | : (-4e^2)$$

$$K^2 + K\left(-\frac{c}{e}\right) - \frac{rc}{4e^2} = 0$$

ist $K \geq \frac{c}{2e} + \sqrt{\frac{c^2 + rc}{4e^2}}$, dann ist (7) erfüllt.

Wenn (7) erfüllt ist, dann haben die Eigenwerte folgende Form:

$$\lambda_{1/2} = -\frac{rc}{2Ke} \text{ für } K = \frac{c}{2e} + \sqrt{\frac{c^2+rc}{4e^2}}$$

↪ stabiler Stern (wenn Eigenvektoren lin. unabhängig) bzw.
stabiler Knotenpunkt Typ II (wenn Eigenvektoren lin. abhängig)

$$\lambda_{1/2} = -\frac{rc}{2Ke} \pm \beta i \text{ mit } \beta > 0 \text{ für } K > \frac{c}{2e} + \sqrt{\frac{c^2+rc}{4e^2}}$$

↪ stabiler Strudel

3. Dynamikergebnis:

Das Volterra-Lotka-Pielou-Modell ist praxisnah, da es mind. einen stabilen Gleichgewichtspunkt $(\frac{c}{e}; \frac{r}{b} - \frac{rc}{beK})$ für eine große Trägerkapazität besitzt. In der Realität ist die Trägerkapazität immer höher als die anderen Steuerparameter. Mit diesem Modell kann man ein **einfaches** Räuber-Beute Verhalten modellieren.

