5. Übungsblatt: Anfangs- und Randwertaufgaben

Vorbereitungsaufgaben

1. Zeigen Sie, daß $u(x,y) = e^x \cos y$ harmonisch (für alle $x, y \in \mathbb{R}^2$) ist. Wo nimmt die Funktion $u(x,y)$ eingeschränkt auf $K_1 = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1\}$ ihr Maxiumum/Minimum an?

2. Für harmonische Funktionen $u : \mathbb{R}^n \supseteq \Omega \to \mathbb{R}$ gilt die Mittelwerteigenschaft

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1}|\mathbb{S}^{n-1}|} \int_{\omega \in \mathbb{S}^{n-1}} u(x + r\omega) \mathrm{d}\omega \qquad (=: A_{x,r}[u])$$

   (falls der Kreis vom Radius r um x komplett in Ω liegt). Es ist also $A_{r,x}[u]$ das Mittel (Average) von u über die Kugeloberfläche vom Radius r um x.

   Begründen Sie, daß die Mittelwerteigenschaft das Maximum-/Minimumprinzip für harmonische Funktionen impliziert.

3. Seien $\Omega_i := \{ x \in \mathbb{R}^2 | \, |x| < 1 \}$ das Innen- und $\Omega_a := \{ x \in \mathbb{R}^2 | \, |x| > 1 \}$ das Außengebiet zum Einheitskreis in der Ebene. Begründen Sie, daß die nachfolgenden Funktionen in den jeweiligen Gebieten harmonisch sind und die angegebenen Randbedingungen erfüllen. Dabei sind jeweils Polarkoordinaten r, ϕ verwendet.

   (a) $u_1(r,\phi) = r^2 \sin 2\phi$ in Ω_i, $u_1|_{\partial\Omega} = \sin 2\phi$
   (inneres Dirichletproblem)

   (b) $u_2(r,\phi) = c_1 r^2 \sin 2\phi + c_2 r^{-2} \sin 2\phi$ in Ω_a, $c_1 + c_2 = 1$, $u_2|_{\partial\Omega} = \sin 2\phi$
   (äußeres Dirichletproblem)

   (c) $u_3(r\, phi) = C + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\phi$ in Ω_i, $C \in \mathbb{R}$, $\partial_n u_3|_{\partial\Omega_i} = \sin 2\phi$
   (inneres Neumannproblem)

   (d) Verwenden Sie das Maximumprinzip um zu begründen, daß es keine in Ω_i harmonische Funktion u mit $\partial_n u|_{\partial\Omega_i} = 1$ geben kann.

   (e) $u_4(r,\phi) = C - \ln r$ in Ω_a, $\partial_n u|_{\partial\Omega_a} = 1$

   (f) $u_5(r,\phi) = C + c_1 r^2 \sin 2\phi + c_2 r^{-2} \sin 2\phi$ in Ω_a, $c_2 - c_1 = \frac{1}{2}$, $C \in \mathbb{R}$, $\partial_n u_3|_{\partial\Omega_a} = \sin 2\phi$
   (äußeres Neumannproblem)

   (g) ZA (für Gy): Verwenden Sie die Lösungsdarstellung mittels Fourierscher Methode aus der letzten Übung (für das Innengebiet und entsprechend für das Außengebiet), um zu begründen, daß die angegebenen Funktionen alle klassischen Lösungen der jeweiligen Randwertprobleme sind.

   Vergleichen Sie mit den Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen aus der Vorlesung.

4. Sei u harmonische Funktion im Inneren der Kugel $\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n | \, |x| < 1 \}$. Durch "Spiegeln" an der Kugeloberfläche konstruieren wir die neue Funktion $\tilde{u}(x) = |x|^{n-2} u(x/|x|^2)$ im Außengebiet der Kugel. Zeigen Sie, daß diese Funktion ebenfalls harmonisch ist.