2. Übung: Anfangs- und Randwertaufgaben

Musterlösungen zu Belegaufgaben

1. Für eine Funktion $g(x)$ ist $\chi * g(x)$ durch das Integral

$$\chi * g(x) = \int \chi(x-y)g(y)\mathrm{d}y = \int_{x-1}^{x+1} g(y)\mathrm{d}y,$$

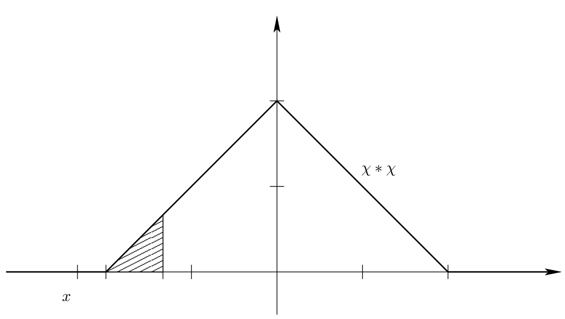
also (bis auf den Faktor 2) durch den Mittelwert von g über dem Intervall $[x-1, x+1]$ gegeben. (Diese Mittelwertbildung ist der Grund, warum falten in der Mathematik gättet...)

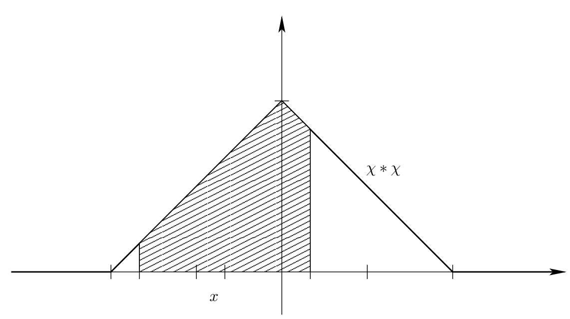
Wie man sich jeweils an Hand geeigneter Skizzen überzeugen kann, gilt

$$\chi * \chi(x) = \int_{x-1}^{x+1} \chi(y)\mathrm{d}y = \int_{\max\{x-1,-1\}}^{\min\{x+1,1\}} \mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ x+2, & -2 < x \le 0, \\ 2-x, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2, \end{cases}$$

und

$$\chi * (\chi * \chi)(x) = \int_{x-1}^{x+1} \chi * \chi(y)\mathrm{d}y = \begin{cases} 0, & x < -3, \\ \frac{(x+3)^2}{2}, & -3 < x \le -1, \\ x^2+3, & -1 < x \le 1 \\ \frac{(x-3)^2}{2}, & 1 < x \le 3, \\ 0, & x > 3. \end{cases}$$





Exkurs: Die entstandenen Funktionen sind Beispiele für sogenannte Splines. Splines der Ordnung k über dem Gitter $\mathbb{Z}$ sind Funktionen, die in allen Intervallen $(k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$ mit Polynomen vom Grad k übereinstimmen und an den Stützstellen $k \in \mathbb{Z}$ jeweils $(k-1)$-fach differenzierbar sind.

Jeder Spline der Ordnung k über dem Gitter $\mathbb{Z}$ läßt sich als Linearkombination von (ganzzahligen) Translaten der Funktion $\chi * \cdots * \chi$, k-fach gefaltet, darstellen. Diese Darstellung (zum Beispiel für $k = 3$) und ihre Verallgemeinerungen auf die Ebene werden werden als B-Splines bezeichnet und in der Computergraphik zum Modellieren von Kurven und Flächen verwendet.