Anfangs- und Randwertaufgaben (SS 2005) – Blatt 5

The important thing in science is not so much to obtain new facts as to discover new ways of thinking about them. (Sir William Bragg)

1. Überprüfen Sie, ob die Funktionen

$$f_1(x,y) = x^2 - y^2,$$
$$f_2(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy),$$

harmonisch sind. Wenn ja, zeigen Sie, daß die Funktionen betrachtet auf der Einheitskreisscheibe $x^2+y^2 \le 1$ ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand der Kreisscheibe annehmen!

(Hinweis: Eine Funktion f heißt harmonisch, falls $\Delta f = \sum_i \partial_i^2 f = 0$ gilt.)

2. Untersucht werden soll das Dirichlet-Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, && \text{in } \Omega, \\ u|_S &= f, && \text{auf dem Rand } S := \partial\Omega, \end{aligned}$$

für die Einheitskreisscheibe $\Omega = \{(x,y) | x^2+y^2 \le 1\}$.

(a) Begründen Sie (durch Einsetzen in die Gleichung), daß durch

$$u(r,\phi) = \frac{1-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\psi)\mathrm{d}\psi}{1+r^2-2r\cos(\phi-\psi)}$$

die Lösung (in Polarkoordinaten) gegeben ist.

(b) Vergleichen Sie die Darstellung mit der Greenschen Integralformel aus der Vorlesung.

(c) Begründen Sie mit Hilfe von (a) die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.

(d) Wie folgt das Maximum/Minimum-Prinzip aus der Mittelwerteigenschaft?

3. Seien nun $\Omega_i := \{x \in \mathbb{R}^2 |\, |x| < 1\}$ das Innen- und $\Omega_a := \{x \in \mathbb{R}^2 |\, |x| > 1\}$ das Außengebiet zum Einheitskreis in der Ebene. Begründen Sie, daß die nachfolgenden Funktionen in den jeweiligen Gebieten harmonisch sind und die angegebenen Randbedingungen erfüllen. Dabei sind jeweils wieder Polarkoordinaten r, ϕ verwendet.

(a) $u_1(r,\phi) = r^2 \sin 2\phi$ in Ω_i, $u_1|_{\partial\Omega} = \sin 2\phi$
(inneres Dirichletproblem)

(b) $u_2(r,\phi) = c_1 r^2 \sin 2\phi + c_2 r^{-2} \sin 2\phi$ in Ω_a, $c_1 + c_2 = 1$, $u_2|_{\partial\Omega} = \sin 2\phi$
(äußeres Dirichletproblem)

(c) $u_3(r,\phi) = C + \frac{1}{2} r^2 \sin 2\phi$ in Ω_i, $C \in \mathbb{R}$, $\partial_n u_3|_{\partial\Omega_i} = \sin 2\phi$
(inneres Neumannproblem)

(d) Verwenden Sie das Maximumprinzip um zu begründen, daß es keine in Ω_i harmonische Funktion u mit $\partial_n u|_{\partial\Omega_i} = 1$ geben kann.

(e) $u_4(r,\phi) = C - \ln r$ in Ω_a, $\partial_n u|_{\partial\Omega_a} = 1$

(f) $u_5(r,\phi) = C + c_1 r^2 \sin 2\phi + c_2 r^{-2} \sin 2\phi$ in Ω_a, $c_2 - c_1 = \frac{1}{2}$, $C \in \mathbb{R}$, $\partial_n u_3|_{\partial\Omega_a} = \sin 2\phi$
(äußeres Neumannproblem)

(g) ZA: Verwenden Sie die Lösungsdarstellung mittels Fourierscher Methode aus der letzten Übung (für das Innengebiet und entsprechend für das Außengebiet), um zu begründen, daß die angegebenen Funktionen alle klassischen Lösungen der jeweiligen Randwertprobleme sind.

Vergleichen Sie mit den Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen aus der Vorlesung.
