Anfangs- und Randwertaufgaben, Blatt 2

Lösung zu Aufgabe 3

Vorbemerkung: Die Heaviside-Funktion

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

(eine Definition in $x = 0$ ist uninteressant, da wir die Funktion als Distribution auffassen wollen) besitzt die Eigenschaft

$$H'(x) = \delta, \qquad < \delta, \phi >= \phi(0),$$

mit δ der Dirac'schen Delta-Distribution wie nachfolgende partielle Integration zeigt

$$\int H'(x)\phi(x)\mathrm{d}x = -\int H(x)\phi'(x)\mathrm{d}x = -\int_0^\infty \phi'(x)\mathrm{d}x = \phi(0),$$

und

$$\int_{-\infty}^x H(y)\mathrm{d}y = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}.$$

Zusammengefaßt lassen sich also die bekannten Differentiationsregeln um zwei erweitern: *Knicke* in Funktionen werden zu Sprungstellen, die einseitigen Ableitungen geben die Funktionswerte links und rechts des Sprunges an, *Sprünge* werden beim Differenzieren zu Vielfachen einer (entsprechend verschobenen) Dirac'schen Delta-Distribution. Die Sprunghöhe gibt das Vielfache an.

Angewandt auf die Funktion $g(x)$ der Aufgabenstellung liefert das

$$g'(x) = -e\delta_1 + \begin{cases} 0, & x < -1 \\ 1, & -1 < x < 0, \\ e^x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

und

$$g''(x) = -e\delta_1' + \delta_{-1} - e\delta_1 + \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1, \end{cases}$$

sowie

$$g'''(x) = -e(\delta_1'' + \delta_1' + \delta_1) + \delta_{-1}' + \delta_0 + \begin{cases} 0, & x < 0, \\ e^x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$