

Analysis I (WS 2004/05) – Blatt 1

In der Mathematik muß man mit allem rechnen. (Werner Mitsch)

Die nicht in der Übung gerechneten Aufgaben sind Hausaufgaben. Hausaufgaben sind bis zum Mittwoch der Folgewoche, 12:00 Uhr, gelöst bei mir (Rammlerbau, Zimmer 205, oder im Sekretariat Karl-Kegel-Bau, Zimmer 105) abzugeben. Für den Erhalt des Übungsscheines ist das erfolgreiche Bearbeiten von zwei Dritteln der Hausaufgaben erforderlich.

1. Man zeige für alle positiven reellen Zahlen x die Ungleichung

$$x + \frac{1}{x} \geq 2.$$

2. Beweise für $a, b \in \mathbb{R}$ die *Dreiecksungleichung*

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

um damit dann nachfolgende Ungleichungen

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & |a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b| \\ \text{(b)} & ||a| - |b|| \leq |a - b| \\ \text{(c)} & |a - c| \leq |a - b| + |b - c| \\ \text{(d)} & |a + b| + |a - b| \geq |a| + |b| \end{array}$$

abzuleiten.

3. Gesucht sind alle reellen Zahlen x , für die

$$\text{(a)} \quad |x + 1| + |x - 1| = 2 \qquad \text{(b)} \quad ||x| - |x - 1|| = 1 \qquad \text{(c)} \quad |x| + |x - 1| = |x + 1|$$

gilt.

4. Seien $a, b \geq 0$ reelle Zahlen. Zeige, daß dann die Ungleichungskette

$$\max(a, b) \geq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \geq \min(a, b)$$

gilt. Unter welchen Bedingungen gilt jeweils Gleichheit?

Die vier Mittelwerte werden als *quadratisches*, *arithmetisches*, *geometrisches* und *harmonisches* Mittel bezeichnet.

5. Zwei endliche Folgen a_1, \dots, a_n and b_1, \dots, b_n positiver Zahlen heißen *gleichgeordnet*, falls für $i, j = 1, \dots, n$ die Ungleichung $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$ gilt.

- (a) Sei c_1, \dots, c_n eine *Umordnung* der Zahlen b_1, \dots, b_n . Zeige, daß dann

$$a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 \leq a_1 c_1 + \dots + a_n c_n \leq a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

gilt.

- (b) Zeige die *Tschebyscheffsche Ungleichung*

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \dots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n}{n}$$

für gleichgeordnete Folgen.