Prof. Dr. W. Sprößig, Dipl.-Math. J. Wirth, Institut für Angewandte Analysis

Analysis I (WS 2004/05) – Blatt 15

Müßiggang ist der Feind der Seele.
(Benedikt von Nursia, Gründer des Benediktinerordens)

Die nachfolgenden Aufgaben sollen Querverbindungen zwischen verschiedenen Teilen der Vorlesung aufzeigen. Es wird empfohlen, die Aufgaben zur Wiederholung zu lösen, mit Musterlösungen ist nicht vor den Prüfungsgesprächen/der Klausur im März zu rechnen.

1. Zeige
$$\cosh(\sin x - \ln x) \sim x, \qquad x \to \infty,$$
d.h. für hinreichend großes N existieren Konstanten C_1 und C_2, so daß
$$C_1 x \le \cosh(\sin x - \ln x) \le C_2 x$$
für alle $x > N$ gilt.

2. Eine zweimal stetig differenzierbare Funktion heißt *konvex* in einem Intervall I, falls dort $f''(x) \ge 0$ gilt. Beweise mit Hilfe der Differentialrechnung die *Jensensche Ungleichung*
$$f(\theta x + (1-\theta)y) \le \theta f(x) + (1-\theta) f(y), \qquad \forall \theta \in [0,1]$$
für gegebenes $x, y \in I$.

3. Sei f auf jedem kompakten Teilintervall von (a,b) Riemann-integrierbar. Existiert der Grenzwert
$$\int_{\to a}^{\to b} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\tilde b \to b-0} \lim_{\tilde a \to a+0} \int_{\tilde a}^{\tilde b} f(x)\mathrm{d}x,$$
so heißt er das *uneigentliche Riemann-Integral* von $f(x)$ über $[a,b]$.
   (a) Begründe, daß die Reihenfolge der beiden Grenzübergänge unerheblich ist.
   (b) Für welche Werte $p, q \in \mathbb{R}$ existiert das Integral (die *Beta-Funktion*)
   $$B(p,q) := \int_{\to 0}^{\to 1} x^p (1-x)^q \mathrm{d}x$$
   (c) Zeige die Existenz des uneigentlichen Riemann-Integrals
   $$\int_{\to 0}^{\to \infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$$
   (d)* Zeige, daß die Gamma-Funktion $\Gamma(t) := \int_{\to 0}^{\to\infty} x^{t-1} e^{-x} \mathrm{d}x$, $t > 0$, (mindestens) zweimal stetig differenzierbar und konvex ist.

4. Man führe eine Kurvendiskussion (vgl. Blatt 13 Aufgabe 3) für die Funktion
$$f(x) = x^2 e^{-1/x^2}, \qquad x \ne 0$$
durch.