

Analysis I (WS 2004/05) – Blatt 9

*Гениальные геометры предлагают теорему, талантливые ее доказывают.
(Неизвестный)*

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Zeige:

(a) Die Folge a_n wächst streng monoton, während b_n streng monoton fällt. Weiter gilt $a_n < e < b_n$.

(b) Für alle n gilt

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

und somit

$$e^{-n}(n+1)^n < n! < e^{-n}(n+1)^{n+1}.$$

2. Die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $f(0) = f(1)$. Man zeige, daß es dann ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ mit $f(c) = f(c + \frac{1}{2})$ gibt.

3. Man zeige: Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und existieren die Limese von f für $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$, so ist f gleichmäßig stetig.

Folgt umgekehrt aus der gleichmäßigen Stetigkeit die Existenz beider Limese?

4. (a) Man zeige, daß

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{4} \cdot \cos \frac{x}{8} \cdots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin(x/2^n)}$$

gilt.

(b) Man nutze (a), um die Produktformel

$$\frac{\sin x}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\nu=1}^n \cos \frac{x}{2^\nu} =: \prod_{\nu=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^\nu}$$

für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ zu beweisen.

(c) Man beweise damit insbesondere die *Vietasche Produktdarstellung* der Zahl π

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$