

## Axiomsystem der reellen Zahlen

Im folgenden bezeichnen  $a, b, c, \dots$  (reelle) Zahlen,  $+$ ,  $\cdot$  Operationen, die zwei (reellen) Zahlen eine neue zuordnen,  $=$  die Gleichheit von zwei Zahlen und  $\leq$  eine Relation zwischen zwei (reellen) Zahlen, die also entweder eine wahre Aussage  $a \leq b$  liefert, oder eine falsche.

### Axiome der Addition (Gruppenaxiome)

$$\mathbf{A1} \quad (a + b) + c = a + (b + c)$$

$$\mathbf{A2} \quad a + b = b + a,$$

$$\mathbf{A3} \quad \exists 0 : \forall a : a + 0 = 0 + a = a$$

$$\mathbf{A4} \quad \forall a : \exists x : a + x = 0 \quad (\text{bezeichnen } x =: -a)$$

### Axiome der Multiplikation (Körperaxiome)

$$\mathbf{M1} \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

$$\mathbf{M2} \quad a \cdot b = b \cdot a$$

$$\mathbf{M3} \quad \exists 1 : \forall a : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$\mathbf{M4} \quad \forall a \neq 0 : \exists y : a \cdot y = y \cdot a = 1 \quad (\text{bezeichnen } y =: a^{-1} =: 1/a)$$

$$\mathbf{M5} \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

### Unendlichkeitsaxiom

Eine Klasse reeller Zahlen wird als natürlich bezeichnet, i.Z.  $a \in N_+$

$$\mathbf{N1} \quad 1 \in N_+$$

$$\mathbf{N2} \quad a \in N_+ \text{ impliziert } a + 1 \in N_+$$

$$\mathbf{N3} \quad 0 \notin N_+$$

## **Axiome der Anordnung**

**01**  $a \leq b$  oder  $b \leq a$

**02**  $a \leq b$  und  $b \leq a$  impliziert  $a = b$

**03**  $a \leq b$  und  $b \leq c$  impliziert  $a \leq c$

**04**  $a \leq b$  impliziert  $a + c \leq b + c$

**05**  $a \leq b$  und  $0 \leq c$  impliziert  $a \cdot c \leq b \cdot c$

## **Archimedisches Axiom**

**A**  $\forall a : \exists n \in N_+ : a \leq n$

## **Vollständigkeitsaxiom**

**V** Jede Zerlegung der reellen Zahlen in zwei Klassen  $A$  und  $B$  mit  $A \leq B$  besitzt ein trennendes Element  $x$ , so daß für alle Zahlen  $a$  aus  $A$  dann  $a \leq x$  und für alle  $b$  aus  $B$  dann  $x \leq b$  gilt.