Analysis II (SS 2005) – Blatt 27

If I were a medical man, I should prescribe a holiday to any patient who considered his work important. (Bertrand Russell; 1872-1970)

1. Man berechne die folgenden Integrale durch Einführung geeigneter neuer Koordinaten!

   (a)
   $$\int\int_A xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
   für A das im ersten Quadranten liegende Viertel des Kreisrings mit innerem Radius a und äußerem Radius $b > a$.

   (b)
   $$\int\int_B \sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
   für B das Gebiet, welches von den Koordinatenachsen und der Parabel $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ begrenzt wird.

   (c)
   $$\int\int\int_C e^{xyz}x^2y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
   für das Gebiet $C := \{x \geq 0,\ y, z \geq 1,\ xyz \leq 1\}$. Hinweis: neue Koordinaten können gemäß $x = u$, $y = \frac{u+v}{u}$ nd $z = \frac{u+v+w}{u+v}$ gewählt werden.

   (d)
   $$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

   (e)
   $$I_n(h) = \int\cdots\int_{S_n} \mathrm{d}x_1 dx_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
   für den n-dimensionalen Simplex $S_n = \{x_i \geq 0,\ x_1+\cdots+x_n \leq h\}$.

2. Es sei S^2 die Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$. Man berechne das Flächenintegral erster Art
   $$I(\zeta) = \int_{S^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}}\,\mathrm{d}\sigma, \qquad \zeta^2 \neq 1,$$
   wobei $\mathrm{d}\sigma$ das übliche zweidimensionale Oberflächenelement auf der Sphäre ist.