

Prüfungsfragen: GK Analysis II – 2005

1 Zahlenreihen

1. Formulieren Sie Konvergenzkriterien für absolut-konvergente Zahlenreihen. Beweisen Sie eines dieser Kriterien !
2. Für welche Werte s ist die Riemannsche Zetafunktion definiert (Begründung !). Wenden Sie die daraus gewonnenen Erkenntnisse an, um die Konvergenz weiterer Zahlenreihen zu zeigen.
3. Welche Probleme bestehen bei Umordnungen von konvergenten Zahlenreihen. Formulieren Sie entsprechende Sätze.

2 Funktionenreihen

1. Unter welchen Bedingungen ist die Grenzfunktion einer Folge stetiger Funktionen stetig, differenzierbarer Funktionen differenzierbar und integrierbarer Funktionen integrierbar ? Geben Sie abgrenzende Beispiele an !
2. Was besagt der Konvergenzradius einer Potenzreihe ? Leiten Sie die HADAMARDSche Formel her.
3. Formulieren Sie Bedingungen unter denen eine Funktion in eine TAYLOR-Reihe entwickelbar ist. Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = \sin x^2$ in eine TAYLORreihe !

3 Fourierreihen

1. Sprechen Sie über trigonometrische Polynome ! Leiten Sie eine Formel für den DIRICHLET-Kern her. Veranschaulichen Sie diesen und geben Sie Anwendungen an.
2. Was ist eine Regelfunktion ? Begründen Sie den Satz von DIRICHLET für FOURIER - Reihen ! Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Darstellungssatz.
3. Sprechen Sie zur Approximation periodischer Funktionen durch trigonometrische Polynome (Minimaleigenschaft, BESSEL-Ungleichung).

4 Topologische Elemente des \mathbb{R}^m

1. Sprechen Sie zu offenen und abgeschlossenen Mengen. Beweisen Sie, dass das Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist und umgekehrt.
2. Charakterisieren Sie kompakte Mengen im metrischen Raum und im \mathbb{R}^m . Beweisen Sie, dass jede unendliche Teilmenge einer kompakten Menge einen Häufungspunkt besitzt, der wieder zur Menge gehört.

3. Was verstehen Sie unter einem ε -Netz ? Wann ist eine Menge beschränkt ? Beweisen Sie, dass kompakte Mengen beschränkt und abgeschlossen sind !
4. Erläutern Sie den Satz von HEINE-BOREL-LEBESGUE ! Gehen Sie auf verschiedene Anwendungen dieses Satzes ein.
5. Formulieren und beweisen Sie den Fixpunktsatz von S. Banach !
6. Wie verhalten sich offene, abgeschlossene und kompakte Mengen bei stetiger Abbildung ? Beweisen Sie eine dieser Aussagen !

5 Differentialrechnung im R^m

1. Definieren Sie den Ableitungsbegriff im R^m . Was ist eine partielle Ableitung? Welche Relationen bestehen zwischen der Existenz partieller Ableitungen, Differenzierbarkeit und Stetigkeit ?
2. Beweisen Sie die Kettenregel! Wenden Sie diese auf skalarwertige Funktionen an.
3. Wie lautet die Taylorsche Formel? Geben Sie als Realisierung den Mittelwertsatz an.
4. Formulieren Sie notwendige und auch hinreichende Bedingungen für das Vorhandensein von Extremwerten.
5. Formulieren Sie den Satz über die inverse Funktion! Was verstehen Sie unter impliziten Differenzieren?
6. Charakterisieren Sie die Operatoren der Feldtheorie. Gehen Sie auf physikalische Interpretationen ein und stellen Sie Verbindungen zur Jakobi-Matrix her!

6 Kurven und Kurvenintegrale

1. Sprechen Sie zur Parameterdarstellung von Kurven im R^n . Stellen Sie dabei die Unterschiede zwischen stetigen Kurven und differenzierbaren Kurven heraus. Haben alle Kurven eines beschränkten Gebietes eine endliche Länge. Was verstehen Sie unter geometrischen Gebilden von gebrochener Dimension ?
2. Diskutieren Sie die Kurvenintegrale von einem stetigen Vektorfeld bzw. einer skalaren Funktion! Geben Sie zwischen beiden einen Zusammenhang an. Welche physikalischen Größen sind mit diesen Integralen verbunden?
3. Definieren Sie den Begriff des Potentialfeldes. Formulieren Sie die beiden Hauptsätze für Kurvenintegrale!

7 Mehrdimensionale Integralrechnung

1. Wann heißt eine Funktion f über einem Quader des \mathbb{R}^m integrierbar? Wie sind die Darboux'schen Summen erklärt? Geben Sie ein notwendig und hinreichendes Kriterium an.
2. Was wissen Sie über die Integrierbarkeit nichtstetiger Funktionen? GÜbertragen Sie den Inegrierbarkeitsbegriff auf beliebige Gebiete des \mathbb{R}^m .
3. Erläutern Sie umfassend den Satz von Fubini!
4. Erläutern Sie die Methode der Variablensubstitution im m-dimensionalen Integral!
5. Sprechen Sie zu krummlinigen Koordinaten zur Darstellung 2-dimensionaler Flächen im \mathbb{R}^3 ! Vertiefen Sie Ihre Erläuterungen durch ein Beispiel.
6. Sprechen Sie zu den Gauß'schen Fundamentalgrößen! Bauen Sie skalare und vektorielle Oberflächenelemente auf.
7. Diskutieren Sie Linienelment und Oberflächenelemente in krummlinigen Koordinaten und in Polarkoordinaten.
8. Diskutieren Sie das Volumenelement in Polarkoordinaten und Kugelkoordinaten!
9. Wie kann der Flächeninhalt einer gekrümmten Fläche definiert werden? Was verstehen Sie unter dem skalaren Oberflächenelement?
10. Erläutern Sie den Satz von Gauß! Gehen Sie auch auf eine physikalische Interpretation ein.
11. Erläutern sie den Satz von Stokes! Geben Sie eine physikalische Interpretation.