Analysis III (WS 2005/06) – Blatt 32

Logic doesn't apply to the real world. (Marvin Lee Minsky)

1. Man bestimme alle Lösungen der folgenden Randwertprobleme:

   (a) $y'' + y = 0$ mit $y(0) = y(\pi) = 1$,

   (b) $y'' + x^2 = 0$ mit $y(0) = y(1) = 0$,

   (c) $y'' + x^2 = 0$ mit $y(0) = y'(1) = 0$,

   (d) $y'' - y' - 2y = 0$ mit $y(0) + y'(0) = 1$ und $y(1) = 0$.

2. Man löse

$$y'' = f(x), \qquad \alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0.$$

   Dazu gebe man

   (a) Bedingungen an die Koeffizienten α_1, α_2, β_1 und β_2 an, so daß das Randwertproblem für *jede* rechte Seite f eindeutig lösbar ist und

   (b) stelle die Lösung $y(x)$ in der Form

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi$$

   mit einer (*Greenschen*) Funktion $G(x,\xi)$ dar.

3. Für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ besitzt das Randwertproblem

$$y'' + \lambda y = 0, \qquad\qquad y(0) - ay'(0) = y(1) + by'(1) = 0$$

   zu vorgegebenen Parametern $a, b > 0$ nichttriviale Lösungen?

4. Untersucht werden soll das Eigenwertproblem für die *Legendresche Differentialgleichung*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \lambda y = 0.$$

   Für welche Werte von λ besitzt diese Differentialgleichung nichttriviale Lösungen, die auf dem Intervall $x \in [-1, 1]$ differenzierbar sind?

   (Hinweis: Um Lösungen zu konstruieren, mache man einen Ansatz als Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $x = 0$. Da für $x \neq \pm 1$ der führende Koeffizient von Null verschieden ist, sind Lösungen, die in ± 1 differenzierbar sind, globale Lösungen. Der Konvergenzradius der entstehenden Potenzreihe also ∞.)