Analysis IV (SS 06) – Blatt 39

Die Mathematik befriedigt den Geist durch ihre ausserordentliche Gewissheit.
– Johannes Kepler –

1. Sei H Hilbertraum und $A \in \mathcal{L}(H)$ beschränkter linearer Operator.

   (a) Dann existiert genau ein Operator $A^* \in \mathcal{L}(H)$ für welchen

   $$(Ax, y) = (x, A^*y) \qquad \forall x, y \in H$$

   gilt. Dieser wird als zu A *adjungierter Operator* bezeichnet.

   (b) Es gilt $\|A\| = \|A^*\|$.

   (c) Es gilt $N(A) = R(A^*)^\perp$ für den Nullraum $N(A) = \{x \in H \,|\, Ax = 0\}$ des Operators A und das Bild $R(A^*) = \{A^*x \,|\, x \in H\}$ des adjungierten Operators A^*.

   (d) Gilt $AA^* = A^*A$, so gilt $\lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} = \|A\|$. Man sagt, der Operator A sei *normal*.

   In diesem Falle gilt $(\lambda I - A)^{-1} = \lambda^{-1} \sum_{k=0}^\infty (\lambda^{-1}A)^k$ als normkonvergente Reihe für alle $|\lambda| > \|A\|$.

   (e) Ist A normal, so existiert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = \|A\|$, so daß $\lambda I - A$ nicht in $\mathcal{L}(H)$ invertierbar ist.

2. Sei H Hilbertraum. Ein Operator $P \in \mathcal{L}(H)$ ist eine *Orthogonalprojektion* auf einen (abgeschlossenen) Unterraum E von H genau dann, wenn P normal ist, $P^2 = P$ und $E = R(P)$ gilt.

   Eine Orthogonalprojektion P gehört zur Klasse der Hilbert-Schmidt-Operatoren genau dann, wenn $\dim R(P) < \aleph_0$ gilt.