Analysis V (WS 2005/06) – Blatt 3

The riddle does not exist. If a question can be put at all, then it can also be answered.
(Ludwig Wittgenstein; 1889-1951)

1. Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ Abschluß eines beschränkten Gebietes. Sei weiter $k \in C(X \times X) \setminus \Delta_X$ schwach singuläre Kernfunktion, d.h. gelte
$$|k(x,y)| \le C|x-y|^{-\alpha}$$
für ein $\alpha < n$. Zeige mit Hilfe des Satzes von Arzela-Ascoli, daß
$$K : C(X) \ni f(x) \mapsto Kf(y) = \int_X k(x,y)f(x)\mathrm{d}x \in C(X)$$
ein kompakter Operator ist.

2. (a) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$. Beweise, daß f
$$\lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$$
erfüllt.
(b) Zu $g \in L^1(\mathbb{R})$ betrachte man den Faltungsoperator
$$T_g : L^p(\mathbb{R}) \ni f \mapsto f * g \in L^p(\mathbb{R}).$$
Zeige, daß dieser für alle $p \in [1,\infty)$ kompakt ist.
(c) Beweise: Die L^1-Algebra besitzt kein Einselement.

3. Es sei $k \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Mit Hilfe von k definiert man den Integraloperator
$$K : L^2(\mathbb{R}) \ni f(x) \mapsto Kf(y) = \int k(x,y)f(x)\mathrm{d}x \in L^2(\mathbb{R}).$$
Man beweise, daß K als Grenzwert endlichdimensionaler Operatoren darstellbar (und damit kompakt) ist. Dabei nutze man, daß $L^2(\mathbb{R})$ eine Orthonormalbasis besitzt.

4. Betrachtet werden soll in $C[0,1]$ die Volterrasche Integralgleichung
$$\phi(x) - K\phi(x) = \phi(x) - \int_0^x k(x,y)\phi(y)\mathrm{d}y = \psi(x)$$
mit stetiger Kernfunktion $k \in C\{y \le x\}$.
(a) Man zeige $K^n \to 0$ für $n \to \infty$. (Hinweis: Man zeige per Induktion $\|K^n\| \le \|k\|_\infty^n/n!$.)
(b) Die Gleichung is für jede rechte Seite $\psi \in C[0,1]$ eindeutig lösbar.

5. Für welche periodischen rechten Seiten $f(x) \in C_{per}[0,2\pi]$ ist die Fredholmsche Integralgleichung
$$\phi(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin(x+y)\phi(y)\mathrm{d}x = f(x)$$
in $C_{per}[0,2\pi]$ lösbar?