

6. Übung Differentialgleichungen

Eine der nachfolgenden Aufgaben bitte bis zur nächsten Seminarveranstaltung lösen und die Lösung bei mir abgeben!

1. **(Binomialreihe)** Die Entdeckung der Binomialentwicklung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-k+1)}{k!},$$

für reelles α im Jahre 1665 war eine der ersten großen Leistungen des damals dreiundzwanzigjährigen Newton. Er fand sie als Frucht halbmystischer Gedankengänge; wir wollen es anders machen. Zeige: Die Funktion $(1+x)^\alpha$ ist (mindestens) im Intervall $(-1, 1)$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$(1+x)y' - \alpha y = 0, \quad y(0) = 1,$$

und der Ansatz als Potenzreihe führt zu ihrer oben angegebenen Darstellung in $(-1, 1)$.

(aus: H. Heuser: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, B.G.Teubner, Stuttgart 1989)

2. **(Airysche Differentialgleichung)**

Die Differentialgleichung

$$y'' - xy = 0,$$

benannt nach Sir George Airy (1801-1892), tritt bei Problemen der Brechung von Licht- und Radiowellen auf.

Man nutze einen Potenzreihenansatz (um $x = 0$) um ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung zu bestimmen.

Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihen?