3. Übung Differentialgleichungen, Lösung zur Aufgabe 2

a) kreisförmiger Spiegelquerschnitt

Einfallendes Licht: Geradenschar $y = y_0 = C$.

Strahl trifft auf Punkt (x_0, y_0) des Spiegels,

$$x_0^2 + y_0^2 = 1, \quad x_0 < 0, \qquad \text{d.h.} \qquad y_0 = \pm\sqrt{1 - x_0^2}.$$

Wir beschränken uns auf $y_0 \geq 0$. Anstieg des Spiegels in diesem Punkt und der entsprechenden Senkrechten,

$$y_0' = -\frac{x_0}{\sqrt{1 - x_0^2}}, \quad m = \frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{x_0} = \tan\alpha$$

reflektierter Strahl hat doppelten Winkel zur x-Achse,

$$m_{refl} = \tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha} = 2\frac{x_0\sqrt{1 - x_0^2}}{x_0^2 - y_0^2} = 2\frac{x_0 y_0}{x_0^2 - y_0^2}.$$

Reflektierter Strahl ist dadurch bestimmt, daß er durch (x_0, y_0) verläuft und den Anstieg m_{refl} hat, d.h.

$$y = 2\frac{x_0 y_0}{x_0^2 - y_0^2}x + y_0 - 2\frac{x_0 y_0}{x_0^2 - y_0^2}x_0.$$

Suchen singuläre Punkte dieser Kurvenschar. Dazu differenzieren wir nach dem Scharparameter x_0 und beachten, daß $y_0' = -\frac{x_0}{y_0}$ und damit

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_0}\frac{x_0 y_0}{x_0^2 - y_0^2} &= \frac{y_0}{x_0^2 - y_0^2} - \frac{x_0^2}{y_0(x_0^2 - y_0^2)} - \frac{4x_0^2 y_0}{(x_0^2 - y_0^2)^2} \\ &= -\frac{1}{y_0(x_0^2 - y_0^2)^2}\left(x_0^4 - 2x_0^2 y_0^2 + y_0^2 + 4x_0^2 y_0^2\right) = -\frac{1}{y_0(x_0^2 - y_0^2)^2}\end{aligned}$$

gilt. Dies ergibt

$$0 = -2\frac{1}{y_0(x_0^2 - y_0^2)^2}x - \frac{x_0}{y_0} + 2\frac{1}{y_0(x_0^2 - y_0^2)^2}x_0 - 2\frac{x_0 y_0}{x_0^2 - y_0^2},$$

bzw. nach Multiplikation mit $\frac{1}{2}y_0(x_0^2 - y_0^2)^2$ und Umstellen nach x

$$x = -\frac{1}{2}x_0(x_0^2 - y_0^2)^2 + x_0 - x_0 y_0^2(x_0^2 - y_0^2) = \frac{1}{2}(3x_0 - 2x_0^3).$$

Einsetzen in die Gleichung der Kurvenschar ergibt damit für y

$$\begin{aligned}y &= \frac{x_0 y_0}{x_0^2 - y_0^2}(3x_0 - 2x_0^3) + y_0 - 2\frac{x_0 y_0}{x_0^2 - y_0^2}x_0 = \frac{y_0}{x_0^2 - y_0^2}\left(3x_0^2 - 2x_0^4 + 2x_0^2 - 1 - 2x_0^2\right) \\ &= \frac{y_0}{2x_0^2 - 1}(3x_0^2 - 2x_0^4 - 1) = y_0^3.\end{aligned}$$

Für $y_0 < 0$ ergibt sich auf entsprechende Weise (und aus Symmetriegründen) derselbe Ausdruck:

$$\boxed{x = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - y_0^2}(1 + 2y_0^2), \quad y = y_0^3, \qquad y_0 \in [-1, 1]}$$

b) hyperbolischer Spiegelquerschnitt

Analog ergibt sich im Falle eines hyperbolischen Spiegels (betrachten diesmal x als Funktion von y)

$$x_0^2 - y_0^2 = 1, \quad x_0 > 0, \qquad \text{d.h.} \qquad x_0 = \sqrt{1 + y_0^2}.$$

$$x_0' = \frac{y_0}{\sqrt{1 + y_0^2}} = \frac{y_0}{x_0}, \quad m = -\frac{x_0}{y_0} = \cot\alpha.$$

$$m_{refl} = \cot(2\alpha) = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} = -\frac{y_0\left(\frac{x_0^2}{y_0^2} - 1\right)}{2x_0} = -\frac{x_0^2 - y_0^2}{2x_0 y_0} = -\frac{1}{2x_0 y_0}.$$

Reflektierte Strahlen:

$$x = -\frac{1}{2x_0 y_0} y + x_0 + \frac{1}{2x_0}.$$

Differenzieren nach x_0 mit $y_0' = \frac{x_0}{y_0}$ ergibt

$$0 = \frac{y_0 + \frac{x_0^2}{y_0}}{2x_0^2 y_0^2} y + 1 - \frac{1}{2x_0^2},$$

$$0 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{y_0^3} y + 2x_0^2 - 1.$$

$$y = y_0^3$$

Einsetzen:

$$x = -\frac{1}{2x_0} y_0^2 + x_0 + \frac{1}{2x_0} = \frac{-y_0^2 + 2x_0^2 + 1}{2x_0} = \frac{x_0^2 + 2}{2x_0} = \frac{3 + y_0^2}{2\sqrt{1 + y_0^2}}$$

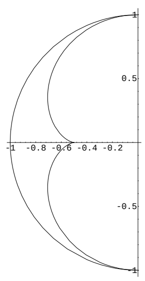
Damit ergibt sich als Einhüllende der reflektierten Schar die Parameterkurve

$$\boxed{x = \frac{3 + y_0^2}{2\sqrt{1 + y_0^2}}, \quad y = y_0^3, \qquad y_0 \in \mathbb{R}}$$

(Es ist natürlich nur der im Innern des Spiegels befindliche Teil von Interesse...)

(Local B) In[12]:=

```
ParametricPlot[{{-Sqrt[1-y0^2],y0},{-1/2 Sqrt[1-y0^2] (1+2y0^2),y0^3}}
```

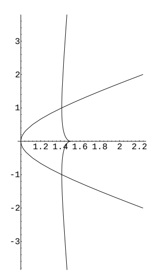


(Local B) Out[12]=

```
-Graphics-
```

(Local B) In[34]:=

```
ParametricPlot[{{Sqrt[1+y0^2],y0},{(3+y0^2)/(2Sqrt[1+y0^2]),y0^3}},{y0
```

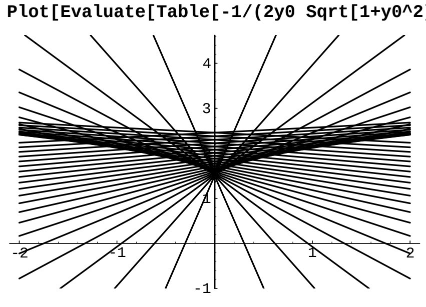


(Local B) Out[34]=

```
-Graphics-
```

(Local B) In[32]:=

```
Plot[Evaluate[Table[-1/(2y0 Sqrt[1+y0^2])y+Sqrt[1+y0^2]+1/(2 Sqrt[1+y0
```



(Local B) Out[32]=

```
-Graphics-
```