7.Übung Differentialgleichungen
Vorbereitungsaufgaben

1. Es sollen die beiden Randwertprobleme

$$(1) \qquad Lu = -u'' = f, \qquad u(0) = 0, \quad u'(\pi) = 0$$
$$(2) \qquad Lu = -u'' = f, \qquad u'(0) = -u(0), \quad u'(2) = u(2)$$

mit homogenen Randdaten und einer stetigen rechten Seite betrachtet werden.

   (a) Ist Problem (1) eindeutig lösbar? Wenn ja, geben Sie die Lösung in der Form

$$u(x) = \int_0^\pi G(x,y) f(y) \mathrm{d}y$$

   mit einer geeigneten (Greenschen) Funktion $G(x,y)$ an!
   (Hinweis: Das Problem ist durch schrittweise Integration lösbar.)

   (b) Zeigen Sie: Das Problem (2) ist selbstadjungiert. Ist 0 Eigenwert?

   (c) Ist das Problem (2) lösbar/eindeutig lösbar?
   (ZA) Kann man eine Zusatzforderung an die Lösung $u(x)$ / rechte Seite $f(x)$ stellen, so daß das Problem (eindeutig) lösbar wird?

2. Nutzen Sie den Entwicklungssatz um den Satz von Mercer zur Darstellung der Greenschen Funktion

$$G(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \phi_k(x) \phi_k(y)$$

mit den Eigenwerten λ_k und den paarweise orthogonalen und normierten Eigenfunktionen ϕ_k des Randwertproblems zu beweisen.

3. Die Differentialgleichung

$$y'' - xy = 0,$$

benannt nach Sir George Airy (1801-1892), tritt bei Problemen der Brechung von Licht- und Radiowellen auf.

Man nutze einen Potenzreihenansatz (um $x = 0$) um ein Fundamentalsystem dieser Differentialgleichung zu bestimmen.

(ZA) Wie groß ist der Konvergenzradius der Potenzreihen?

4. Die Differentialgleichung

$$xy' + (1 + x^2)y = 0$$

soll durch einen verallgemeinerten Potenzreihenansatz der Form $y = x^r \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ gelöst werden.

   (a) Für welche Werte von r kann eine Lösung der Form existieren?

   (b) Man bestimme die Lösung, für die $c_0 = 1$ gilt.

   (c) Welche Funktion wird durch die verallgemeinerte Potenzreihe dargestellt? (Hinweis: Die Gleichung ist auch durch Trennung der Veränderlichen lösbar.)

 wirth@math.tu-freiberg.de