Durch Quadratur lösbare Differentialgleichungen erster Ordnung

(Diese Aufstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit)

Nr.	Bezeichnung	Struktur	Lösungsverfahren
$\boxed{1}$	Differentialgleichung vom Produkttyp	y'=f(x)g(y)	Trennung der Veränderlichen: $\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\mathrm{d}x$
$\boxed{2}$	Lineare Differentialgleichung	y'=f(x)y+g(x)	Zwei Schritte, a) Lösen der homogenen Differentialgleichung $y' = f(x)y$, vgl. $\boxed{1}$, $y = C\exp(F(x))$, $F(x) = \int f(x)\mathrm{d}x$ und b) Variation der Konstanten, Ansatz $y = C(x)\exp(F(x))$, vgl. wiederum $\boxed{1}$
$\boxed{3}$	Ähnlichkeitsdifferentialgleichung	$y' = f(x/y), y \neq 0$	Substitution $z = \frac{x}{y}$, $z' = \frac{1}{y} - \frac{xy'}{y^2}$ führt auf $xz' = z - z^2 f(z)$, vgl. $\boxed{1}$
$\boxed{4}$	Bernoullische Differentialgleichung	$y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$, $\alpha \neq 0, 1$, $y \geq 0$	Substitution $z = y^{1-\alpha}$, $z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ führt auf $z' = (1-\alpha)(zf(x) + g(x))$, vgl. $\boxed{2}$
$\boxed{5}$	Riccatische Differentialgleichung	$y' = f(x)y + g(x)y^2 + h(x)$,	$h(x) \equiv 0$ fällt unter $\boxed{4}$, allgemein: ist $u(x)$ eine Lösung, so führt $y(x) = u(x) + v(x)$ zu $v' = (f(x) + 2u(x)g(x))v + g(x)v^2$, vgl. $\boxed{4}$
$\boxed{6}$	Totale Differentialgleichung	$f(x,y) + y'g(x,y) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$	Konstruktion einer Potentialfunktion $F(x,y)$ mit $\frac{\partial F}{\partial x} = f$ und $\frac{\partial F}{\partial y} = g$, das heißt $F(x,y) = \int^{(x,y)} \{f(x,y)\mathrm{d}x + g(x,y)\mathrm{d}y\} = \int_0^x f(\xi,0)\mathrm{d}\xi + \int_0^y g(x,\eta)\mathrm{d}\eta$, Lösungen der Differentialgleichung sind Niveaulinien $F(x,y) = \text{const}$
$\boxed{7}$	Methode des integrierenden Faktors	$f(x,y) + y'g(x,y) = 0$	Gesucht ist $\mu(x,y)$, so daß $\mu(x,y)f(x,y) + y'\mu(x,y)g(x,y) = 0$ zu $\boxed{6}$ gehört (nur unter zusätzlichen Symmetrievoraussetzungen brauchbar, z.b. wenn $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$, $\mu = \mu(x+y)$, $\mu = \mu(xy)$ etc. auf eine gewöhnliche Differentialgleichung für μ führt.)

http://www.mathe.tu-freiberg.de/~wirth
http://www.mathe.tu-freiberg.de/~semmler
wirth@math.tu-freiberg.de
semmler@math.tu-freiberg.de