

Differentialgleichungen (WS 2004/05) – Blatt 7

*Die Mathematik muß man schon deswegen studieren, weil sie die Gedanken ordnet.
(M. W. Lomonossow)*

1¹. Betrachtet wird das System

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} u$$

für eine vektorwertige Funktion $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Parametern $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- Welche Fälle können bei der Bestimmung der Eigenwerte der Koeffizientenmatrix auftreten? Begründen Sie dies! (Dabei soll zwischen reell, imaginär, komplex, positiv, Null, negativ unterschieden werden.)
- Wie ist in jedem der Fälle vorzugehen, um die allgemeine Lösung zu bestimmen?
- Skizzieren Sie für jeden der Fälle die Kurvenschar der allgemeinen Lösung. Welche Bedeutung haben im Falle reeller Eigenwerte die Eigenvektoren?

2. Ein Federschwinger mit Dämpfung wird modelliert durch die Schwingungsdifferentialgleichung

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \mu^2 x = 0,$$

wobei $\delta \geq 0$ die Stärke der Dämpfung und μ^2 die Federkonstante, jeweils bezogen auf die Masse, beschreibt.

- Transformieren Sie auf ein (autonomes) System erster Ordnung.
- Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Koeffizientenmatrix. Welche verschiedenen Fälle treten auf? Nutzen Sie diese Informationen um Phasenportraits der zugehörigen Lösungen zu erstellen.

Entsprechend kann ein gedämpftes mathematisches Pendel

$$\ddot{\phi} + 2\delta\dot{\phi} + \mu^2 \sin \phi = 0$$

betrachtet werden. Dabei bezeichnet $\phi \in [0, 2\pi)$ die Auslenkung von der Vertikalen.

- Formulieren Sie wieder ein autonomes System erster Ordnung und bestimmen Sie alle stationären Punkte.
- Wie lauten die Linearisierungen in den stationären Punkten?
- Skizzieren Sie ein Phasenportrait im Falle einer kleinen Dämpfung $\delta > 0$.

¹Zur Wiederholung der Vorlesung und zum Selberrechnen.

Z. Begründen Sie: Die van-der-Polsche Gleichung

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

besitzt den einzigen stationären Punkt $x = \dot{x} = 0$, welcher für $\mu > 0$ instabil ist.

Um zu zeigen, daß trotzdem alle Lösungen beschränkt bleiben, untersuchen Sie die Energie $e(t) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\dot{x}^2$ und zeigen, daß diese zumindest für $|x| > 1$ monoton fällt. Daraus folgt, daß es mindestens einen stabilen Grenzzyklus gibt. Wieso?

<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~wirth>
<http://www.mathe.tu-freiberg.de/~semmler>

wirth@math.tu-freiberg.de
semmler@math.tu-freiberg.de