Differentialgleichungen (WS 2004/05) – Klausur

Musterlösungen

1. Berechnen Sie die orthogonalen Trajektorien zur Kurvenschar

$$y = Cx^3, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Skizzieren und benennen Sie beide Kurvenscharen!

In einem ersten Schritt bestimmt man die Differentialgleichung der gegebenen Parabelschar. Es gilt

$$C = yx^{-3}, \qquad 0 = y'x^{-3} - 3yx^{-4},$$

oder $y' = 3xy$. Die Differentialgleichung der orthogonalen Schar ist somit

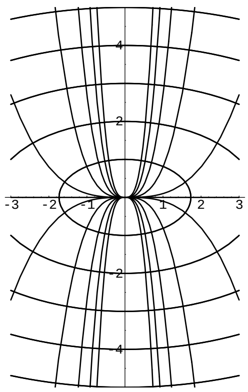
$$-\frac{1}{y'} = 3\frac{y}{x},$$

was sich mit der Methode der Trennung der Veränderlichen lösen läßt. Dabei erhält man

$$-x\mathrm{d}x = 3y\mathrm{d}y, \qquad -\int x\mathrm{d}x = 3\int y\mathrm{d}y$$

und damit nach Integration $-\frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2}y^2 + C$ oder $x^2 + 3y^2 = R^2$ mit $R^2 = -2C$.

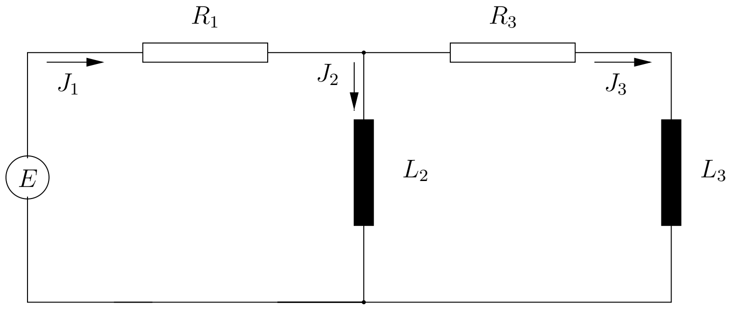
Dies ist die Gleichung einer Ellipsenschar um den Ursprung.



2. Es seien $J_1(t)$, $J_2(t)$, $J_3(t)$ die Ströme im folgenden Netzwerk mit den Widerständen $R_1 = 200\Omega$, $R_3 = 300\Omega$, den Induktivitäten $L_1 = L_2 = 0,5H$ und der Spannung $E = 50V$.

Man findet die Gleichungen

$J_1 = J_2 + J_3$	(Stromsatz im Knotenpunkt)
$R_1J_1 + L_2\dot{J}_2 = E$	(Spannungssatz für die linke Masche)
$R_3J_3 + L_3\dot{J}_3 - L_2\dot{J}_2 = 0$	(Spannungssatz für die rechte Masche)



Durch Elimination von J_2 kann man ein Differentialgleichungssystem für die Vektorfunktion $\vec{x}(t) = (J_1(t), J_3(t))^T$ in der üblichen Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$ aufstellen, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{-R_1 - R_3}{L_3} & -\dfrac{R_1}{L_3} \\[2ex] -\dfrac{R_1}{L_2} & -\dfrac{R_1}{L_2} \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \dfrac{E}{L_3} \\[2ex] \dfrac{E}{L_2} \end{pmatrix}.$$

(a) Warum ist dieses System autonom?

(b) Man bestimme die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.

(c) Bestimmen Sie sämtliche stationären Punkte des inhomogenen Systems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{b}$.

(d) Wie lautet die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems? Ermitteln Sie den zeitlichen Verlauf der Ströme unter den Anfangsbedingungen $J_1(0) = J_3(0) = 0$.

(e) Klassifizieren Sie die stationären Punkte und beschreiben Sie das Verhalten des Systems für $t \to +\infty$. Skizzieren Sie das Phasenporträt in der J_1-J_3-Ebene.

Nach Einsetzen der Werte erhält man das System

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -1000 & -400 \\ -400 & -400 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

(a) Das System ist autonom, da die rechte Seite nicht von t abhängt.

(b) Wir berechnen die Eigenwerte der Matrix zu

$$\begin{vmatrix} -1000 - \lambda & -400 \\ -400 & -400 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1400\lambda + 400 \cdot 1000 - 400^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -700 \pm \sqrt{700^2 - 400 \cdot 600} = -700 \pm 500$$

$$\lambda_1 = -1200 \qquad \lambda_2 = -200$$

Zugehörige Eigenvektoren berechnet man zu

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{-1200t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-200t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Für eine stationäre Lösung gilt $\dot{\vec{x}}_{stat} = \vec{o}$, so daß sich das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1000 & -400 \\ -400 & -400 \end{pmatrix} \vec{x}_{stat} + \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix}$$

ergibt. Es hat die Lösung

$$\vec{x}_{stat}(t) \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(d) Da die stationäre Lösung eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung ist, können wir die allgemeine Lösung dieser schreiben als

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{-1200t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-200t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingungen führt auf

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

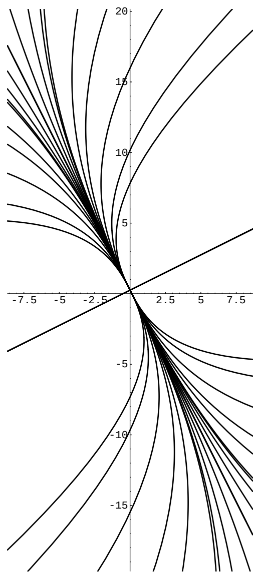
woraus man auf $C_1 = -\frac{1}{20}$ und $C_2 = \frac{1}{10}$ schließt. Somit lautet die spezielle Lösung

$$\vec{x}(t) = -\frac{1}{20} e^{-1200t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{10} e^{-200t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(e) Für $t \to +\infty$ strebt jede Lösung gegen den stationären Punkt. Es handelt sich also um einen stabilen Fixpunkt. Das Phasenporträt besteht aus Kurven, die sich (bis auf eine) tangential an die Gerade mit der Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

annähern.



3. Berechnen Sie mit Hilfe der Potenzreihenmethode (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$) die allgemeine Lösung der Gleichung

$$(1 + x^2)y'' - 6y = 0.$$

Wie groß ist der Konvergenzradius der erhaltenen Potenzreihe?

Die Lösung erfolgt mit dem Potenzeihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Vorbehaltlich eines positiven Konvergenzradius darf man die Reihen gliedweise differenzieren. Dabei erhält man

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \qquad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt dies

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2) a_{k+2} x^k + x^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} - 6 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

Zum Koeffizientenvergleich fassen wir die Reihen zusammen. Das ergibt

$$2a_2 - 6a_0 + \big(6a_3 - 6a_1\big)x + \sum_{k=2}^{\infty} \big((k+1)(k+2)a_{k+2} + k(k-1)a_k - 6a_k\big)x^k = 0,$$

beziehungsweise für die Koeffizienten

$$a_2 = 3a_0, \qquad a_3 = a_1, \qquad a_{k+2} = \frac{6 + k - k^2}{k^2 + 3k + 2} a_k = -\frac{k-3}{k+1} a_k.$$

Um die allgemeine Lösung zu erhalten, bestimmen wir ein Fundamentalsystem $\{y_1, y_2\}$, wobei wir für y_1 die Koeffizienten $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$ und für y_2 entsprechend $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$ wählen. Offenbar sind die beiden so erhaltenen Funktionen linear unabhängig.

Berechnung von $y_1(x)$. Es gilt

$$a_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{2k+1} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

und

$$\begin{aligned} a_0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a_{2k} &= -\frac{2k-5}{2k-1} a_{2k-2} = +\frac{(2k-5)(2k-7)}{(2k-1)(2k-3)} a_{2k-4} \\ &= (-1)^k \frac{(2k-5)(2k-7)\cdots(-3)}{(2k-1)(2k-3)\cdots 1} a_0 \\ &= (-1)^k \frac{(-1)(-3)}{(2k-1)(2k-3)} a_0 = (-1)^k \frac{3}{(2k-1)(2k-3)} \end{aligned}$$

Den Konvergenzradius der Reihe erhält man mit dem Quotientenkriterium, die Reihe konvergiert (divergiert) für

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+2}x^{k+2}|}{|a_k x^k|} = |x|^2 \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+2}|}{|a_k|} = |x|^2 \lim_{k\to\infty} \left| -\frac{k-3}{k+1} \right| = |x|^2 < (>) 1.$$

Als Konvergenzradius ergibt sich $\rho = 1$.

Berechnung von $y_2(x)$. Entsprechend folgt

$$a_0 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_{2k} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

und

$$a_1 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a_5 = 0$$

und damit $a_{2k+1} = 0$ für $k = 2, 3, \ldots$. Die Funktion $y_2(x)$ ist also das Polynom

$$y_2(x) = x + x^3,$$

Konvergenzradius dieser Lösung also Unendlich.

Die allgemeine Lösung ist

$$y(x) = c_1 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k-1)(2k-3)} x^{2k} + c_2(x + x^3)$$

mit frei wählbaren Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ (und für x mit $|x| < 1$).

4. Vorgelegt sei das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = \frac{t+y}{1+ty}, \qquad y(0) = y_0 \geq 0$$

für eine Funktion $y = y(t)$, $t \geq 0$. Diskutieren Sie das Lösbarkeitsverhalten (lokale Existenz, globale Existenz, Eindeutigkeit) dieser Gleichung durch Anwendung bekannter Sätze aus der Vorlesung.

Die lokale Existenz der Lösung folgt aus dem Satz von Peano, da die rechte Seite offenbar eine stetige Funktion ist. Diese lokale Lösung ist eindeutig nach dem Satz von Picard-Lindelöf, da die rechte Seite für jedes t nach y differenzierbar ist und somit lokal eine Lipschitzbedingung erfüllt (Mittelwertsatz). Für $y_0 \geq 0$ folgt $\dot{y} \geq 0$ und somit $y \geq 0$ für alle t im Definitionsbereich der Lösung.

Die lokal eindeutige Lösung läßt sich zu einer globalen Lösung für alle $t \geq 0$ fortsetzen, da die rechte Seite in y höchstens linear wächst. Dies folgt z.B. aus

$$0 \leq \frac{t+y}{1+ty} \leq t + y.$$

http://www.mathe.tu-freiberg.de/~wirth wirth@math.tu-freiberg.de
http://www.mathe.tu-freiberg.de/~semmler semmler@math.tu-freiberg.de

Bewertungsschema:

A1 1 Differentialgleichung
1 Gleichung der orthogonalen Schar
2 L\"osung durch Trennung der Ver\"anderlichen
1 Bezeichnung der Kurven
1 Skizze
-- 6 Punkte

A2
(a) 1 Punkt
(b) 1 richtiges Einsetzen
1 Eigenwerte
1 Eigenvektoren
1 L\"osung des homogenen Systems
(c) 2 Punkte
(d) 1 station\"are L\"osung als spezielle L\"osung erkennen
1 allgemeine L\"osung der inhomogenen Gleichung
1 Berechnung der Koeffizienten aus den Anfangsbedingungen
(e) 1 Punkt f\"ur asymptotisches Verhalten
1 Punkt f\"ur Skizze
-- 12 Punkte

A3 1 Ansatz
2 Einsetzen in die Differentialgleichung und Koeffizientenvergleich
1 Rekursionsformeln fuer Koeffizienten
2 L\"osen der Rekursion
1 Konvergenzradius berechnen
1 Angabe Fundamentalsystem / allgemeine L\"osung
-- 8 Punkte

A4 1 Existenzsatz (Peano oder Picard-Lindel\"of)
1 Eindeutigkeit der L\"osung (Picard-Lindel\"of)
1 Positivit\"at der L\"osung (wichtig f\"ur nichtlokale Aussagen)
1 globale Existenz der L\"osung
-- 4 Punkte

Gesamt: 30

0..11.5	Punkte	5
ab 12	Punkte	4.0
ab 15	Punkte	3.7
ab 16.5	Punkte	3.3
ab 18	Punkte	3.0
ab 21	Punkte	2.7
ab 22.5	Punkte	2.3
ab 24	Punkte	2.0
ab 26	Punkte	1.7
ab 27	Punkte	1.3
ab 29	Punkte	1.0