7. Übung Integralgleichungen

1. Ein (linearer) Operator $A : H \to H$ in einem Hilbertraum H heißt normal, falls er mit seinem Adjungierten kommutiert, also $AA^* = A^*A$ gilt. Zeige für einen normalen Operator A

   (a) $\rho(A^*) = \overline{\rho(A)}$ für seine Resolventenmenge,

   (b) die Formel für den Spektralradius $r(A) = ||A|| = ||A^*||$,

   (c) die Orthogonalität paarweise verschiedener Eigenunterräume.

2. (a) Sei der (lineare) Operator $K : H \to H$ normal und kompakt. Begründe, daß es dann ein Orthonormalsystem $(\phi_j | j \in J)$ von H gibt, so daß

   $$Kf = \sum_j \lambda_j (f, \phi_j)\phi_j$$

   gilt. Dabei ist $\{\lambda_j | j \in J\} = \sigma(K) \setminus \{0\}$.

   (b) Sei $K : H \to H$ kompakt, aber nicht notwendig normal. Begründe, daß man dann zwei Orthonormalsysteme $(\phi_j | j \in J)$ und $(\psi_j | j \in J)$ von H gibt, so daß

   $$Kf = \sum_j \sigma_j (f, \phi_j)\psi_j$$

   mit geeigneten positiven Zahlen σ_j, den Singulärwerten, gilt.
   (Schmidt- oder Singulärwertzerlegung eines Operators, Hinweis: man kann die Aussage aus (a) auf KK^* und K^*K anwenden. Zeigt man dazu noch, daß $||KK^*|| = ||K^*K||$, so sieht man, daß beide Operatoren dasselbe Spektrum besitzen und die Eigenunterräume durch K paarweise aufeinander abgebildet werden müssen.)

3. Es bezeichne $\Sigma(K)$ die Menge der Singulärwerte des kompakten Operators $K : H \to H$. Begründe, daß dann durch

   $$S_p = \{\ K \in \mathcal{K}(H) \mid ||K||_{S_p}^p = \sum_{\sigma \in \Sigma(K)} |\sigma|^p < \infty\ \}$$

   und

   $$S_\infty = \{\ K \in \mathcal{K}(H) \mid ||K||_{S_\infty} = \max_{\sigma \in \Sigma(K)} |\sigma|\ \}$$

   Banachräume definiert werden und insbesondere $S_\infty = \mathcal{K}(H)$ gilt. Zeige, daß $S_p \subseteq S_q$ für $p \le q$.
   Die Räume S_p werden als Schatten-von Neumann-Klassen von Operatoren bezeichnet.
   (Dabei bezeichne $\mathcal{K}(H)$ die Banach-Algebra der kompakten Operatoren.)

4. Es gilt $S_2 = HS$ und die S_2-Norm entspricht der Hilbert-Schmidt-Norm.

5*. Es gilt die Hölder-Ungleichung für Schattenklassen. Ist $A \in S_p$ und $B \in S_q$ mit $p + q \le pq$, so ist $AB \in S_r$ für

   $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$$

   und $||AB||_{S_r} \le ||A||_{S_p} ||B||_{S_q}$.

5. Sei $A \in S_1$. Dann stellt der Ausdruck

$$\operatorname{trace} A = \sum_j (A\phi_j, \phi_j)$$

für jede Orthonormalbasis ϕ_j von H eine absolut konvergente Reihe dar, deren Reihensumme von der gewählten Orthonormalbasis unabhängig ist.

(Analog zu Matrizen wird trace A als Spur des Operators A bezeichnet.)

http://www.mathe.tu-freiberg.de/~wirth wirth@math.tu-freiberg.de