

Dr. Jens Wirth  
Institut für Angewandte Analysis  
TU Bergakademie Freiberg

# Signaltheorie

1. Auflage

Freiberg, 19. Juli 2006



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie der Fouriertransformation</b>	<b>5</b>
1.1	Elementare Eigenschaften . . . . .	5
1.2	Der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ und die Fouriersche Inversionsformel . . . . .	10
1.3	Temperierte Distributionen . . . . .	15
1.4	Die Poissonsche Summationsformel und Fourierreihen . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Phasenraumanalysis</b>	<b>27</b>
2.1	Die Heisenbergsche Unschärferelation . . . . .	27
2.2	Zeit-Frequenz-Lokalisation . . . . .	30
2.3	Zeit-Frequenz-Darstellungen von Signalen . . . . .	36
	2.3.1 Die gefensterter Fouriertransformation . . . . .	37
	2.3.2 Die Wigner-Verteilung . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Gabor-Frames</b>	<b>47</b>
3.1	Rieszbasen und Frames in Hilberträumen . . . . .	47
3.2	Gabor-Systeme und die Segal-Algebra $S_0(\mathbb{R})$ . . . . .	51
3.3	Der Gabor-Frame-Operator . . . . .	55
3.4	Duale Gabor-Systeme . . . . .	56

## Vorrede

Gegenstand der Vorlesung ist eine Einführung in Probleme der Signaltheorie. Dazu werden in einem ersten Abschnitt Eigenschaften der Fouriertransformation und ihr Zusammenhang zu Fourierreihen in den Mittelpunkt gestellt. Beantwortet werden soll dabei die Frage nach der Invertierbarkeit der Fouriertransformation in verschiedenen Räumen.

Der weitere Verlauf der Vorlesung beschäftigt sich mit Fragen der Zeit-Frequenz-Lokalisation und deren Grenzen. Behandelt wird die Unschärferelation für Signale mit ihren Konsequenzen. Danach schließt sich eine Einführung der gefensterter Fouriertransformation an.

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage der Rekonstruierbarkeit von Signalen aus diskreten Informationen. Dazu werden Frames als Verallgemeinerung von Rieszbasen in normierten Räumen eingeführt und die Theorie der Gabor-Frames entwickelt.

## (Weiterführende) Literatur

- [1] Karlheinz Gröchenig, *Foundations of Time-Frequency Analysis*, Birkhäuser, Boston 2001
- [2] Brian Davies, *Integral transforms and their applications*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 2000
- [3] Robert S. Strichartz, *A guide to distribution theory and Fourier transforms*, World Scientific, 2003
- [4] Elias M. Stein, Guido Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton University Press, 1990
- [5] Hans G. Feichtinger, Thomas Strohmer, *Gabor Analysis and Algorithms. Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1998
- [6] Hans G. Feichtinger, Thomas Strohmer, *Advances in Gabor Analysis*, Birkhäuser, Boston, 2003

# 1 Theorie der Fouriertransformation

In diesem Kapitel verfolgen wir die Idee, daß man Signale, modelliert durch komplexwertige Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.0.1)$$

als Überlagerung von Schwingungen der Form

$$t \mapsto e^{2\pi i \omega t} = \cos(2\pi \omega t) + i \sin(2\pi \omega t) \quad (1.0.2)$$

zur (Kreis-) Frequenz  $\omega$  mit zugehörigen Intensitäten  $\hat{f}(\omega)$  darstellen kann. Formal kann man das als

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \omega t} \hat{f}(\omega) d\omega \quad (1.0.3)$$

schreiben. Ziel dieses Kapitels ist, herauszuarbeiten, welche Voraussetzungen dabei an das Signal  $f$  bzw. die Funktion  $\hat{f}$  zu stellen sind und in welchen Sinne man dabei das auftretende Integral zu interpretieren hat.

Die Zuordnung zwischen der *Frequenzdarstellung*  $\hat{f}$  und der *Zeitdarstellung*  $f$  des Signals wird dabei durch die *Fouriertransformation*  $\mathcal{F}$  realisiert,  $f = \mathcal{F}\hat{f}$ .

Um die Assoziationen physikalischer Größen zu den Variablen  $t$  und  $\omega$  zu unterbinden, nutzen wir im folgenden als Variablen  $x, y, \dots$  und als zugehörige Kovariablen griechische Buchstaben  $\xi, \eta, \dots$ . Weiterhin ist die Definition der Fouriertransformation in der Literatur nicht einheitlich, wir werden die in Formel (1.0.3) genutzte Version verwenden.

## 1.1 Elementare Eigenschaften

Wir wiederholen zuerst die Definition der  $L^p$ -Räume.<sup>1</sup> Für eine Borelmenge  $A \subseteq \mathbb{R}$  bezeichne im folgenden  $|A|$  ihr Lebesgue-Maß, ebenso sei

$$\mathcal{N} = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ borel-meßbar und } |\{x \mid f(x) \neq 0\}| = 0 \} \quad (1.1.1)$$

die Menge aller Nullfunktionen. Dann ist für alle  $p \in [1, \infty)$

$$L^p(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ borel-meßbar und } \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx < \infty \} / \mathcal{N} \quad (1.1.2)$$

versehen mit der  $p$ -Norm

$$\|f\|_p = \left( \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.1.3)$$

---

<sup>1</sup>Für alle diejenigen, denen Maßtheorie an dieser Stelle fremd ist sei empfohlen die Details der nächsten Formeln zu ignorieren und sich Funktionen im folgenden als stetig vorzustellen. Die angegebenen Räume erhält man dann als Vervollständigung.

ein Banach-Raum, ebenso

$$L^\infty(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ borel-meßbar und } \operatorname{ess\,sup}_x |f(x)| < \infty \} / \mathcal{N}, \quad (1.1.4)$$

wobei

$$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_x |f(x)| = \inf_{|A|=0} \sup_{x \in \mathbb{R} \setminus A} |f(x)|. \quad (1.1.5)$$

Weiß man von Funktionen  $f$  und  $g$  über die Zugehörigkeit zu  $L^p$ -Räumen, so kann man Aussagen über das Produkt  $fg(x) = f(x)g(x)$  treffen. Wichtigstes Hilfsmittel dazu ist die Höldersche Ungleichung.

**Lemma 1.1.1 (Höldersche Ungleichung).** *Seien  $p, q \in [1, \infty]$ , so daß  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ . Dann gilt für  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R})$  die Höldersche Ungleichung*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.1.6)$$

*Insbesondere ist  $fg \in L^r(\mathbb{R})$ .*

*Beweis.* Vgl. Übung. □

Von besonderer Bedeutung werden im folgenden die Räume  $L^1(\mathbb{R})$ ,  $L^2(\mathbb{R})$  und  $L^\infty(\mathbb{R})$  sein.

**Definition 1.1.2.** Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann definiert man die *Fouriertransformierte* von  $f$  als

$$\mathcal{F}f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} f(\xi) d\xi. \quad (1.1.7)$$

**Satz 1.1.3.** *Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  ist ein beschränkter linearer Operator  $L^1 \rightarrow L^\infty$  mit  $\|\mathcal{F}\|_{1 \rightarrow \infty} \leq 1$ .*

*Beweis.* Die Linearität folgt direkt aus der Linearität des Integrals. Für die Beschränktheit nutzen wir  $|e^{2\pi i x \xi}| = 1$  und damit

$$|\mathcal{F}f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} f(\xi) d\xi \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi = \|f\|_1.$$

□

Wir wollen für Signale zwei elementare Operationen definieren. Zum Einen sei

$$T_{x_0}f(x) := f(x - x_0) \quad (1.1.8)$$

die *Translation* um  $x_0$ , andererseits

$$M_{\xi_0}f(x) := e^{2\pi i x \xi_0} f(x) \quad (1.1.9)$$

die *Modulation* mit der Frequenz  $\xi_0$ . Es gilt

$$\|T_{x_0}\|_{p \rightarrow p} = \|M_{\xi_0}\|_{p \rightarrow p} = 1 \quad (1.1.10)$$

für alle  $p \in [1, \infty]$ . Beide Operationen sind durch die Fouriertransformation miteinander verknüpft.

**Lemma 1.1.4.** Es gilt  $\mathcal{F} \circ T_{\xi_0} = M_{\xi_0} \circ \mathcal{F}$  und  $\mathcal{F} \circ M_{x_0} = T_{-x_0} \circ \mathcal{F}$ .

*Beweis.* Der Beweis erfolgt durch nachrechnen. Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \circ T_{\xi_0} f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} f(\xi - \xi_0) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x(\xi + \xi_0)} f(\xi) d\xi = M_{\xi_0} \circ \mathcal{F} f(x)\end{aligned}$$

und entsprechend

$$\mathcal{F} \circ M_{x_0} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x+x_0)\xi} f(\xi) d\xi = T_{-x_0} \circ \mathcal{F} f(x).$$

□

Eine weitere elementare Operation mit Signalen ist die *Faltung*. Seien dazu  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann definiert man

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy. \quad (1.1.11)$$

Die Definition ist korrekt, da mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}\|f * g\|_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \right| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| |g(y)| dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y)| dx |g(y)| dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy = \|f\|_1 \|g\|_1\end{aligned}$$

gilt. Insbesondere ist also  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ . Man zeigt leicht, daß  $L^1(\mathbb{R})$  damit eine kommutative Banachalgebra wird, das Faltungsprodukt also kommutativ und assoziativ ist und zusammen mit der Addition das Distributivgesetz gilt. (Übung!)

**Satz 1.1.5.** Für  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  gilt

$$\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[g]. \quad (1.1.12)$$

*Beweis.* Da  $f * g \in L^1(\mathbb{R})$  gilt, existieren alle auftretenden Integrale und es folgt mit dem Satz von Fubini-Tonelli

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f * g](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi - \eta)g(\eta) d\eta d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x(\xi - \eta)} f(\xi - \eta) e^{2\pi i x \eta} g(\eta) d\eta d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x(\xi - \eta)} f(\xi - \eta) d\xi e^{2\pi i x \eta} g(\eta) d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \eta} g(\eta) d\eta = \mathcal{F}[f](x) \mathcal{F}[g](x).\end{aligned}$$

□

Zum Abschluß dieses Abschnitts soll der Zusammenhang zwischen der Fouriertransformation und Ableitungen geklärt werden. Sei dazu

$$D : f(x) \mapsto \frac{1}{2\pi i} f'(x) \quad (1.1.13)$$

und

$$X : f(x) \mapsto xf(x), \quad (1.1.14)$$

jeweils definiert auf der Menge aller Funktionen  $\{f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R}) \mid Df, Xf \in L^1(\mathbb{R})\}$ . Dann gilt die folgende Aussage:

**Lemma 1.1.6.** *Es gilt  $\mathcal{F} \circ D = -X \circ \mathcal{F}$  und  $\mathcal{F} \circ X = D \circ \mathcal{F}$ .*

*Beweis.* Der Beweis erfolgt wiederum durch nachrechnen, wobei wir  $f \in C^1(\mathbb{R})$  mit  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \pm\infty$  voraussetzen. Dann gilt mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \circ Df(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} \frac{1}{2\pi i} f'(\xi) d\xi \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi i x}{2\pi i} e^{2\pi i x \xi} f(\xi) d\xi = -X\mathcal{F}f(x) \end{aligned}$$

und entsprechend für  $f \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $xf(x) \in L^1(\mathbb{R})$

$$D \circ \mathcal{F}f(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \xi f(\xi) d\xi = \mathcal{F} \circ Xf(x).$$

□

## Aufgaben

**Aufgabe 1.1.** Man zeige, daß durch  $\|\cdot\|_p$  für  $p \in [1, \infty]$  eine Norm auf  $L^p(\mathbb{R})$  definiert wird, d.h. daß folgende Aussagen gelten

- $\|f\|_p \geq 0$  und  $\|f\|_p = 0$  genau dann, wenn  $f = 0$  fast überall ( $f = 0$  modulo  $\mathcal{N}$ ),
- $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p$  für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,
- $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ .

Man nutze weiter für alle  $p \in (1, \infty)$  den Lebesgueschen Konvergenzsatz aus der Maßtheorie<sup>2</sup>, um zu zeigen, daß zu jeder Folge  $f_n \in L^p(\mathbb{R})$  mit  $\|f_n - f_m\|_p \rightarrow 0$  für  $m, n \rightarrow \infty$  ein Element  $f \in L^p(\mathbb{R})$  mit  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  existiert. Ebenso zeige man die entsprechende Aussage für  $p = \infty$ .

<sup>2</sup>Also die entsprechenden Aussage für  $p = 1$ .

**Aufgabe 1.2.** Seien  $p, q$  in  $[1, \infty]$ , so daß  $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ . Dann erfüllt zu  $f \in L^p(\mathbb{R})$  und  $g \in L^q(\mathbb{R})$  das Produkt  $fg \in L^r(\mathbb{R})$  und es gilt die (verallgemeinerte) *Höldersche Ungleichung*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.1.15)$$

**Aufgabe 1.3.** Von einer Funktion  $f \in L^p(\mathbb{R})$  weiß man, daß

$$\text{supp } f = \text{cl}\{f \neq 0\} \quad (1.1.16)$$

eine Menge endlichen Maßes ist, d.h.  $|\text{supp } f| < \infty$ . Man zeige, daß dann  $f \in L^q(\mathbb{R})$  für alle  $1 \leq q \leq p$  gilt. (Dabei bezeichne für eine Teilmenge  $M$  eines metrischen Raumes  $\text{cl } M$  den Abschluß von  $M$ .)

**Aufgabe 1.4.** Seien  $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$  und  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Man beweise

- a)  $f * g = g * f$ ,
- b)  $(f * g) * h = f * (g * h)$ ,
- c)  $\alpha f * g = (\alpha f) * g = f * (\alpha g)$ ,
- d)  $f * (g + h) = f * g + f * h$ .

**Aufgabe 1.5.** Seien  $p, q \in [1, \infty]$ , so daß  $1 - \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ . Dann erfüllt für  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $g \in L^q(\mathbb{R})$  die Faltung  $f * g \in L^r(\mathbb{R})$ . Dabei gilt die *Youngsche Ungleichung*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.1.17)$$

**Aufgabe 1.6.** Sei  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in [1, \infty)$ . Dann erfüllen die Translationen  $T_h f$  die Beziehung

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|T_h f - f\|_p = 0. \quad (1.1.18)$$

Man nennt diese Eigenschaft von  $L^1$ -Funktionen *Stetigkeit im Mittel*. Insbesondere ist die Abbildung  $\mathbb{R} \ni h \mapsto T_h \in \mathcal{L}(L^p)$  stetig.

**Aufgabe 1.7.** Sei  $g \in L^1(\mathbb{R})$  eine Funktion mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1. \quad (1.1.19)$$

Definiert man nun  $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} g(\frac{x}{\epsilon})$ , so gilt

- a)  $\int_{-\infty}^{\infty} g_\epsilon(x) dx = 1$ ,
- b) für jede Funktion  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in [1, \infty)$ , gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|f * g_\epsilon - f\|_p = 0. \quad (1.1.20)$$

Die Approximation von  $f$  durch  $f * g_\epsilon$  wird als *Friedrichs-Glättung* bezeichnet.

**Aufgabe 1.8.** Ist  $f \in L^1(\mathbb{R})$  und  $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ . Dann ist  $f * g \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ .

**Aufgabe 1.9.** Zeige, daß  $\|\mathcal{F}\|_{1 \rightarrow \infty} = 1$ .

## 1.2 Der Schwartz-Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ und die Fouriersche Inversionsformel

Im weiteren Verlauf folgen wir einer Idee von Laurent Schwartz und beschränken uns vorerst auf eine Klasse sehr schöner Funktionen um Eigenschaften der Fouriertransformation zu beweisen. Danach nutzen wir funktionalanalytische Methoden, um diese Eigenschaften auf eine möglichst große Klasse allgemeinerer Objekte zu übertragen.

Der *Schwartz-Raum*  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist durch

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\mathbb{R}) &= \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ und für alle } k, \ell \in \mathbb{N} \text{ gilt } x^k \partial_x^\ell f(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \} \\ &= \{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ und für alle } k, \ell \in \mathbb{N} \text{ gilt } \partial_x^k (x^\ell f(x)) \in L^1(\mathbb{R}) \}\end{aligned}$$

definiert. Beide angegebenen Definitionen sind äquivalent. (Übung)

Die in der Definition an die Funktion gestellten Bedingungen kann man nutzen, um  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  mit der Struktur eines lokalkonvexen Raumes zu versehen. Dazu nutzen wir die beiden (äquivalenten) Systeme von Seminormen

$$p_{k,\ell}(f) = \|X^k D^\ell f\|_\infty \quad \text{und} \quad q_{k,\ell}(f) = \|D^k X^\ell f\|_1. \quad (1.2.1)$$

Diese Seminormen bestimmen Konvergenz im Schwartz-Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Eine Folge  $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  heißt in  $\mathcal{S}$  gegen  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  konvergent, falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{k,\ell}(f_n - f) = 0 \quad (1.2.2)$$

für alle  $k, \ell$  gilt.

**Beispiel 1.2.1.** Die Funktion

$$f(x) = e^{-x^2} \quad (1.2.3)$$

gehört zum Schwartz-Raum  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Sie wird als *Gauß-Kern* bezeichnet. Um das zu zeigen, nutzen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} e^{-x^2} dx = 0$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} y^{k-\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \prod_{l=1}^k \left(k - \frac{1}{2}\right).$$

Insbesondere kann man damit die Fouriertransformation eines Gauß-Kerns berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}e^{-\pi c^2 \xi^2} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} e^{-\pi c^2 \xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi - \pi c^2 \xi^2} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(c\xi - i\frac{x}{c})^2 - \frac{\pi}{c^2} x^2} d\xi \\ &= e^{-\frac{\pi}{c^2} x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(c\xi - i\frac{x}{c})^2} d\xi = \frac{1}{c} e^{-\frac{\pi}{c^2} x^2}.\end{aligned}$$

□

Insbesondere haben wir damit gezeigt:

**Proposition 1.2.2.** *Der normalisierte Gauß-Kern ist eine Eigenfunktion der Fouriertransformation. Es gilt  $\mathcal{F}[e^{-\pi\xi^2}] = e^{-\pi x^2}$ .*

**Beispiel 1.2.3.** Jede Funktion  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , für die der Träger

$$\text{supp } f = \text{cl}\{f \neq 0\} \quad (1.2.4)$$

kompakt ist, gehört zu  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Bezeichnung: Die Menge dieser Funktionen heißt  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Satz 1.2.4.**  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ist stetig.

*Beweis.* Es gilt

$$p_{k,\ell}(\mathcal{F}f) = \|X^k D^\ell \mathcal{F}f\|_\infty = \|\mathcal{F}D^k X^\ell f\|_\infty \leq \|D^k X^\ell f\|_1 = q_{k,\ell}(f)$$

und die Behauptung folgt aus der Äquivalenz der Seminormsysteme.  $\square$

**Satz 1.2.5 (Fouriersche Inversionsformel in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ).** *Für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  gilt  $\mathcal{F}\mathcal{F}[f](x) = f(-x)$ .*

*Beweis.* Das iterierte Integral existiert im Lebesgueschen Sinne. Um ein konvergentes Doppelintegral zu erhalten, schneiden wir die großen Frequenzen heraus, d.h. wir betrachten mit einer Abschneidefunktion  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| \geq 2 \end{cases}$$

die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mathcal{F}[f](-x) &= \int \int e^{2\pi i(x'-x)\xi} f(x') dx' d\xi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \int e^{2\pi i(x'-x)\xi} f(x') \chi(\epsilon\xi) dx' d\xi \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f(x') \int e^{2\pi i(x'-x)\cdot\xi} \chi(\epsilon\xi) d\xi dx' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f(x') \epsilon^{-1} \int e^{2\pi i\epsilon^{-1}(x'-x)\eta} \chi(\eta) d\eta dx' \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int f(x') g_\epsilon(x-x') dx' = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} f * g_\epsilon(x) = cf(x) \end{aligned}$$

mit

$$g(x) = \int e^{-2\pi i x \cdot \xi} \chi(\xi) d\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad g_\epsilon(x) = \epsilon^{-1} g(\epsilon^{-1}x), \quad c = \int g(x) dx.$$

Da  $\mathcal{F}$  den normierten Gauß-Kern invariant läßt, muß  $c$  den Wert 1 haben.  $\square$

Bezeichnet man  $\mathcal{F}$  mit  $\mathcal{F}^+$  und setzt

$$\mathcal{F}^- [f](x) = \mathcal{F}[f](-x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} f(\xi) d\xi, \quad (1.2.5)$$

so kann man den letzten Satz zu  $(\mathcal{F}^+)^{-1} = \mathcal{F}^-$  zusammenfassen. Definiert man für zwei Funktionen  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  das Skalarprodukt

$$(f | g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (1.2.6)$$

so sind  $\mathcal{F}^+$  und  $\mathcal{F}^-$  durch eine weitere Beziehung verknüpft.

**Lemma 1.2.6.** Seien  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Dann gilt  $(\mathcal{F}^+ f | g) = (f | \mathcal{F}^- g)$ .

*Beweis.* Mit dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}f | g) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} f(\xi) d\xi \overline{g(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} g(x) dx} d\xi = (f | \mathcal{F}^- g). \end{aligned}$$

□

Da  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dicht in  $L^2(\mathbb{R})$  ist (vgl. Übung), das obige Skalarprodukt aber gerade dem Innenprodukt des Hilbertraumes  $L^2(\mathbb{R})$  entspricht, ergibt sich unmittelbar:

**Korollar 1.2.7 (Satz von Plancherel).** Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}^\pm$  läßt sich stetig zu einem unitären Operator  $\mathcal{F}^\pm : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  fortsetzen. Damit gilt

$$(f | g) = (\mathcal{F}^\pm f | \mathcal{F}^\pm g) \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}), \quad (1.2.7)$$

insbesondere gilt  $\|\mathcal{F}^\pm f\|_2 = \|f\|_2$ .

Man kann die Invarianz von  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  unter  $\mathcal{F}$  auch nutzen um weitere Informationen über das Bild  $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R})$  zu erhalten.<sup>3</sup>

**Lemma 1.2.8 (Riemann-Lebesgue-Lemma).** Es gilt  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow C_\infty(\mathbb{R})$ , d.h. die Fouriertransformierte jeder  $L^1$ -Funktion ist stetig und erfüllt

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathcal{F}[f](x) = 0. \quad (1.2.8)$$

*Beweis.* Da  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dicht in  $L^1(\mathbb{R})$  ist, muß auch  $\mathcal{F}\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}(\mathbb{R})$  dicht im Bild  $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R}) \subseteq L^\infty(\mathbb{R})$  bzgl. der  $L^\infty$ -Norm sein. Der Abschluß von  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in  $L^\infty(\mathbb{R})$  ist aber gerade  $C_\infty(\mathbb{R})$  (vgl. Übung). □

## Aufgaben

**Aufgabe 1.10.** Man zeige, daß es sich bei  $p_{k,\ell}$  (und entsprechend  $q_{k,\ell}$ ) um Seminormen handelt, daß heißt

- $p_{k,\ell}(f) \geq 0$ ,
- $p_{k,\ell}(\alpha f) = |\alpha| p_{k,\ell}(f)$  für alle  $\alpha \in \mathbb{C}$ ,
- $p_{k,\ell}(f + g) \leq p_{k,\ell}(f) + p_{k,\ell}(g)$ .

<sup>3</sup>Wobei allerdings anzumerken ist, daß bis heute keine alternative Charakterisierung des Bildes  $\mathcal{F}L^1(\mathbb{R})$  existiert. Nicht jede  $L^\infty$ -Funktion ist als Bild  $\mathcal{F}f$  einer  $L^1$ -Funktion  $f$  darstellbar, ebensowenig jede  $C_\infty$ -Funktion.

Man zeige weiter, daß die Systeme vollständig sind in dem Sinne, daß aus  $p_{k,\ell}(f) = 0$  für alle  $k, \ell$  stets  $f = 0$  folgt.

**Aufgabe 1.11.** Man zeige die Äquivalenz der beiden Systeme von Seminormen, die in der Definition des Schwartz-Raumes  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  genutzt worden sind. Dazu zeigen man, daß es zu  $k, \ell$  Konstanten  $K(k)$  und  $L(\ell)$  sowie  $C_{k,\ell,\tilde{k},\tilde{\ell}}$  mit

$$p_{k,\ell}(f) \leq \sum_{\tilde{k} \leq K(k), \tilde{\ell} \leq L(\ell)} C_{k,\ell,\tilde{k},\tilde{\ell}} q_{\tilde{k},\tilde{\ell}}(f) \quad (1.2.9)$$

gibt. Entsprechend zeige man die Existenz von  $\tilde{K}(k)$ ,  $\tilde{L}(\ell)$  und  $\tilde{C}_{k,\ell,\tilde{k},\tilde{\ell}}$  mit

$$q_{k,\ell}(f) \leq \sum_{\tilde{k} \leq \tilde{K}(k), \tilde{\ell} \leq \tilde{L}(\ell)} \tilde{C}_{k,\ell,\tilde{k},\tilde{\ell}} p_{\tilde{k},\tilde{\ell}}(f) \quad (1.2.10)$$

**Aufgabe 1.12.** Man zeige, daß  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  dichter Teilraum von  $L^p(\mathbb{R})$  für alle  $p \in [1, \infty)$  ist. Man zeige weiter, daß der Abschluß von  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in  $L^\infty(\mathbb{R})$  gerade der Raum

$$C_\infty(\mathbb{R}) = \{ f \in C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \} \quad (1.2.11)$$

ist.

**Aufgabe 1.13 ( $L^2$ -Bandfilter).** Eine erste wichtige Anwendung des bisher behandelten Stoffes liefern sogenannte *Filter*. Diese werden genutzt, um in einem Signal Frequenzbereiche herauszufiltern.

Sei dazu  $f \in L^2(\mathbb{R})$  ein Signal,  $m = m(\xi) \in L^\infty(\mathbb{R})$  eine Abschneidefunktion mit  $m(\xi) = 1$  auf einem Intervall  $I$  und  $m(\xi) = 0$  auf  $\mathbb{R} \setminus I_\epsilon = \{ \xi \in \mathbb{R} \mid \text{dist}(\xi, I) \geq \epsilon \}$  für ein  $\epsilon > 0$ . Unter dem zugeordneten  $I$ -Bandfilter versteht man dann den Operator

$$m(D) : L^2(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \mathcal{F}[m(\xi)\mathcal{F}^{-1}f] \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.2.12)$$

- a) Zeige, daß  $\|m(D)\|_{2 \rightarrow 2} = \|m\|_\infty$  gilt.
- b) Gilt  $m \in \mathcal{FL}^1(\mathbb{R})$ , d.h. existiert ein  $k \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $\mathcal{F}k = m$ , so gilt  $m(D)f = k * f$ . Was meint man damit, wenn man sagt, ein derartiger Filter sei *nichtlokal*.

*Bemerkung:* Die Bezeichnung  $m(D)$  für diesen Operator ist gerechtfertigt, da durch Lemma 1.1.6 formal auch  $Df = \mathcal{F}[\xi\mathcal{F}^{-1}f]$  gilt, die Funktion  $m(\xi) = \xi$  formal also auch auf den Operator  $m(D) = D$  führt. Solche Operatoren wollen wir als Fouriermultiplikatoren bezeichnen.

**Aufgabe 1.14 (Faltungsgleichung).** Beobachtet / mißt man ein Signal, so wird die Meßapparatur nicht das wahre Signal, sondern einen ‘Mittelwert’ über kleine Zeitintervalle messen. Mathematisch formuliert heißt das, der Meßapparatur entspricht ein Faltungskern  $k$  und statt dem Signal  $f$  wird

$$Kf(x) = k * f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x-y)f(y)dy \quad (1.2.13)$$

gemessen. Wir nehmen an,  $k \in L^1(\mathbb{R})$  und betrachten Signale  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .

- a) Welche Bedingung muß der Faltungskern  $k$  erfüllen, so daß der Operator  $K$  injektiv ist, d.h. daß aus dem Meßergebnis  $Kf = 0$  auch  $f = 0$  folgt?
- b) Wie kann man unter den Voraussetzungen von a) das Signal  $f$  aus dem Meßwert  $Kf$  rekonstruieren?
- c) Ist die Rekonstruktion stabil unter Störungen, d.h. gilt  $\|f\|_2 \leq c\|Kf\|_2$  für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ?

**Aufgabe 1.15.** Eine weitere Anwendung der Fouriertransformation stellen Differentialgleichungen dar. Ist  $P \in \mathbb{C}[X]$  ein Polynom, so kann man nach der Existenz von Lösungen der Gleichung  $P(D)f = g$  und deren Eigenschaften fragen. Welche Bedingungen muß  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  erfüllen, so daß eine Lösung  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  existiert? Unter welchen Bedingungen an  $P(D)$  existiert zu jedem  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  genau eine Lösung  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ?

**Aufgabe 1.16.** Der normalisierte Gauß-Kern  $\phi_0(x) = e^{-\pi x^2}$  ist Eigenfunktion der Fouriertransformation. Es gilt  $\mathcal{F}\phi_0 = \phi_0$ . Mit seiner Hilfe lassen sich weitere Eigenfunktionen der Fouriertransformation konstruieren.

- a) Sei

$$\phi_k(x) = (X - iD)^k \phi_0(x) \quad (1.2.14)$$

für  $k \in \mathbb{N}$ . Zeige, daß dann  $\mathcal{F}\phi_k = i^k \phi_k$  gilt. Die Funktionen  $\phi_k(x)$  werden als *Hermite-Funktionen* bezeichnet.

- b) Zeige, daß die Hermite-Funktion  $\phi_k(x)$  sich als  $\phi_k(x) = H_k(x)\phi_0(x)$  mit einem reellen Polynom  $H_k(x)$  vom Grad  $k$ , dem  $k$ -ten *Hermite-Polynom*, schreiben läßt. Man beweise für die Hermite-Polynome die *Formel von Rodriguez*

$$H_k(x) = e^{2\pi x^2} \frac{d^k}{dx^k} e^{-2\pi x^2}, \quad (1.2.15)$$

sowie die Rekurrenzformel

$$H_{k+1}(x) = 2xH_k(x) - iDH_k(x). \quad (1.2.16)$$

- c) Man beweise die Operatorgleichung

$$(X + iD)(X - iD) = X^2 + D^2 + \frac{1}{2\pi} = (X - iD)(X + iD) + \frac{1}{\pi} \quad (1.2.17)$$

und mit ihrer Hilfe die *Orthogonalitätsrelation* der Hermite-Funktionen

$$(\phi_k | \phi_\ell) = \frac{k!}{\sqrt{2\pi^k}} \delta_{k,\ell} = \begin{cases} 0, & k \neq \ell, \\ \frac{k!}{\sqrt{2\pi^k}}, & k = \ell. \end{cases} \quad (1.2.18)$$

Das Symbol  $\delta_{k,\ell}$  wird als *Kronecker-Symbol* bezeichnet.

d) Man nutze (1.2.17) um die Eigenwertgleichung

$$(X^2 + D^2)\phi_k = \frac{2k+1}{2\pi} \phi_k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.2.19)$$

zu zeigen. Der Operator  $X^2 + D^2$  ist selbstadjungiert im  $L^2$ -Sinn.

*Bemerkung:* Nutzt man die Kompaktheit seines Inversen  $(X^2 + D^2)^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ , so folgt mit dem Spektralsatz von Riesz-Schauder die Vollständigkeit des Orthogonalsystems  $\phi_k$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ . Jedes  $f \in L^2(\mathbb{R})$  kann also durch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(x), \quad c_k = \frac{1}{\|\phi_k\|_2^2} (f | \phi_k) = \frac{\sqrt{2\pi}^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \phi_k(x) dx \quad (1.2.20)$$

als  $L^2$ -konvergente Reihe dargestellt werden.

## 1.3 Temperierte Distributionen

Temperierte Distributionen sind beschränkte Linearformen auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , d.h. Abbildungen

$$\Psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \langle \Psi, f \rangle \in \mathbb{C}, \quad (1.3.1)$$

für welche eine Abschätzung

$$|\langle \Psi, f \rangle| \leq \sum_{j \in J} C_j p_j(f) \quad (1.3.2)$$

für eine (endliche) Auswahl von Seminormen  $p_j$ ,  $j \in J$ , gilt. Die Menge aller temperierten Distributionen wird mit  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  bezeichnet.

**Beispiel 1.3.1.** Sei  $g \in L^p(\mathbb{R})$  für ein  $p \in [1, \infty]$ . Dann definiert

$$f \mapsto \langle g, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx \quad (1.3.3)$$

eine temperierte Distribution. (Die nötige Abschätzung folgt direkt aus der Höldersche Ungleichung und der Einbettung  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^{p'}(\mathbb{R})$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .)  $\square$

**Beispiel 1.3.2.** Sei  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  und existiere eine Konstante  $N$ , so daß  $g(x)(1+x^2)^{-N/2} \in L^1(\mathbb{R})$  gilt. Dann ist durch (1.3.3) eine temperierte Distribution definiert. Eine auf diese Weise konstruierte Distribution wird als *reguläre Distribution* bezeichnet.

Die Zuordnung, die der Funktion  $g$  die Distribution  $g : f \mapsto \langle g, f \rangle$  zuordnet, ist injektiv.  $\square$

**Beispiel 1.3.3.** Die Abbildung

$$\delta_0 : f \mapsto f(0) \quad (1.3.4)$$

definiert eine temperierte Distribution. Diese wird als *Diracsche Deltadistribution* bezeichnet. Analog wollen wir  $\delta_{x_0}$  für ein  $x_0 \in \mathbb{R}$  durch  $\langle \delta_{x_0}, f \rangle = f(x_0)$  definieren.  $\square$

**Beispiel 1.3.4.** Sei  $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$  ein Radon-Maß mit

$$\ln(e + |\mu(A)|) \leq C \operatorname{diam}(A) \quad (1.3.5)$$

für jede kompakte Menge  $A$  mit Durchmesser  $\operatorname{diam}(A)$ . Dann definiert

$$\mu : f \mapsto \langle \mu, f \rangle = \int f(x) d\mu(x) \quad (1.3.6)$$

eine Distribution. Die Zuordnung  $\mathbb{M}(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  ist injektiv.  $\square$

Temperierte Distributionen bilden einen Vektorraum. Die zugehörigen Operationen sind durch

$$\langle \Phi + \alpha\Psi, f \rangle = \langle \Phi, f \rangle + \alpha\langle \Psi, f \rangle \quad (1.3.7)$$

zu  $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  und  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Der Raum der temperierten Distributionen ist auf natürliche Weise mit einem Konvergenzbegriff versehen. Sei dazu  $\Psi_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  eine Folge von temperierten Distributionen. Diese heißt gegen ein  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  konvergent, falls für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\langle \Psi_n - \Psi, f \rangle \rightarrow 0 \quad (1.3.8)$$

gilt.

**Lemma 1.3.5 (Hahn-Banachscher Trennungssatz für  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ).** Seien  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $f \neq g$ . Dann existiert ein  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  mit  $\langle \Psi, f \rangle \neq \langle \Psi, g \rangle$ .

*Beweis.* Es genügt ist zeigen, daß für ein  $\Psi$  die Beziehung  $\langle \Psi, f - g \rangle \neq 0$  gilt. Sei dazu  $x \in \mathbb{R}$  ein Punkt, für den  $f(x) \neq g(x)$  gilt. Setzt man dann  $\Psi = \delta_x$  die an die Stelle  $x$  verschobene Delta-Distribution, so folgt die Behauptung.  $\square$

Ähnlich wie für Banachräume nutzt man den Hahn-Banachschen Trennungssatz zur Definition des transponierten Operators.

**Korollar 1.3.6.** Sei  $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  ein beschränkter linearer Operator. Dann existiert genau ein Operator  $A^T : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , der zu  $A$  transponierte<sup>4</sup> Operator, für den

$$\langle A^T \Psi, f \rangle = \langle \Psi, Af \rangle \quad (1.3.9)$$

für alle  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  gilt. Dieser ist beschränkt da

$$|\langle A^T \Psi, f \rangle| = |\langle \Psi, Af \rangle| = |\langle \Psi, g \rangle| \quad (1.3.10)$$

mit  $g = Af$ .

Operationen für Distributionen ergeben sich nun einfach durch Transponieren. So setzt man

$$\langle \partial_x \Psi, f \rangle = \langle \Psi, -\partial_x f \rangle. \quad (1.3.11)$$

---

<sup>4</sup>Manchmal sagt man auch der zu  $A$  konjugierte Operator. Fordert man für Linearformen  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  Antilinearität im zweiten Argument (wie für Skalarprodukte), so spricht man vom adjungierten Operator.

Ist  $\Psi$  reguläre Distribution und klassisch differenzierbar, so stimmt dieser distributionelle Ableitungsbegriff mit dem klassischen überein, da mittels partieller Integration

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\partial_x g(x)) f(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} g(x) (\partial_x f(x)) dx \quad (1.3.12)$$

für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und alle  $g \in C^1(\mathbb{R})$  mit  $g(x)(1+x^2)^{-N/2} \in L^\infty(\mathbb{R})$  für hinreichend großes  $N$  gilt.

Analog kann man mit der Fouriertransformation vorgehen. Da für  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  (ähnlich zu Lemma 1.2.6) stets  $\langle g, \mathcal{F}^\pm f \rangle = \langle \mathcal{F}^\pm g, f \rangle$  gilt, setzt man

$$\langle \mathcal{F}^\pm \Psi, f \rangle = \langle \Psi, \mathcal{F}^\pm f \rangle. \quad (1.3.13)$$

Eigenschaften eines Operators  $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  übertragen sich auf den transponierten Operator  $A^T : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . So gilt

**Proposition 1.3.7.** *Sei  $A : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  stetiger linearer Operator. Dann gilt*

1. *Ist  $A$  surjektiv, so ist  $A^T$  injektiv.*
2. *Ist  $A$  invertierbar, so auch  $A^T$ .*
3. *Ist  $A$  symmetrisch, d.h. gilt  $\langle Af, g \rangle = \langle f, Ag \rangle$  für alle  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , dann ist  $A^T$  die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung von  $A$  auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .*

*Beweis.* Sei  $A$  surjektiv. Dann gilt  $A^T \Psi = 0$  genau dann, wenn für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  die Beziehung  $0 = \langle A^T \Psi, f \rangle = \langle \Psi, Af \rangle$  gilt. Da  $Af$  aber ganz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  durchläuft, folgt daraus  $\Psi = 0$  und  $A^T$  ist injektiv.

Ist  $A$  invertierbar, so gilt  $A^T \Psi = \Phi$  genau dann, wenn für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$   $\langle \Psi, Af \rangle = \langle \Phi, f \rangle$  und damit  $\langle \Psi, g \rangle = \langle \Phi, A^{-1}g \rangle$ , d.h.  $\Psi = (A^{-1})^T \Phi$  gilt.

Die dritte Aussage ist äquivalent zur Dichtheit von  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , eine Aussage, die wir hier nicht beweisen wollen. □

**Korollar 1.3.8 (Fouriersche Inversionsformel).** *Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}^\pm : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  ist ein Isomorphismus. Weiterhin gilt für jedes  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$*

$$\mathcal{F}^\mp \mathcal{F}^\pm \Psi = \Psi. \quad (1.3.14)$$

Da sowohl  $L^1(\mathbb{R})$  als auch  $L^2(\mathbb{R})$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  eingebettet sind, bleibt anzumerken, daß die distributionelle Fouriertransformation mit der vorher definierten Transformation auf diesen Räumen übereinstimmt.

**Beispiel 1.3.9.** Es gilt  $\mathcal{F}^\pm \delta_0 = 1$ , da

$$\langle \mathcal{F}^\pm \delta_0, f \rangle = \langle \delta_0, \mathcal{F}^\pm f \rangle = \mathcal{F}^\pm[f](0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \langle 1, f \rangle. \quad (1.3.15)$$

□

In Verbindung mit der Stetigkeit der Fouriertransformation auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  ergibt dies eine einfache Charakterisierung für sogenannte  $\delta$ -Folgen in  $L^1(\mathbb{R})$ .<sup>5</sup>

**Beispiel 1.3.10.** Sei  $g \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = 1$ . Dann für  $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}g(\frac{x}{\epsilon})$

$$g_\epsilon \rightarrow \delta_0 \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \text{ für } \epsilon \rightarrow 0 \quad (1.3.16)$$

da  $\mathcal{F}g_\epsilon = \mathcal{F}[g](\epsilon\xi) \rightarrow 1$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  gilt. Für letzteres nutzen wir, daß  $\mathcal{F}g$  beschränkt und stetig ist, sowie  $\mathcal{F}g(0) = 1$  gilt, da dann mit dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathcal{F}[g](\epsilon\xi)}_{|\cdot| \leq \|g\|_1} f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{F}[g](\epsilon\xi) f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \quad (1.3.17)$$

für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  (sogar  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ) gilt. □

Für das folgende bezeichne

$$\mathcal{O}_M(\mathbb{R}) := \{ g \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \forall k \exists N_k : \partial_x^k g(x)(1+x^2)^{-N_k/2} \in L^\infty(\mathbb{R}) \} \quad (1.3.18)$$

die Menge der *schwach wachsenden Funktionen*. Dann ist zu jedem  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und jedem  $g \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  das Produkt  $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und der Multiplikationsoperator beschränkt. Transponieren liefert

$$\langle g\Psi, f \rangle = \langle \Psi, gf \rangle \quad (1.3.19)$$

und definiert das Produkt  $g\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Insbesondere sind damit die Operationen der Translation  $T_x$  und der Modulation  $M_\xi$  aus Abschnitt 1.1 auch für temperierte Distributionen definiert. Die Beziehung  $\mathcal{F}^\pm \circ T_{\xi_0} = M_{\pm\xi_0} \circ \mathcal{F}^\pm$  und  $\mathcal{F}^\pm \circ M_{x_0} = T_{\mp x_0} \circ \mathcal{F}^\pm$  überträgt sich direkt. Ebenso erhält man  $\mathcal{F}^\pm \circ D = \mp X \circ \mathcal{F}^\pm$ . Damit können wir weitere Beispiele angeben.

**Beispiel 1.3.11.** Sei  $x \in \mathbb{R}$ . Dann gilt

$$\mathcal{F}^\pm[\delta_x](\xi) = \mathcal{F}^\pm T_x[\delta_0](\xi) = M_{\pm x} 1 = e^{\pm 2\pi i x \xi} \quad (1.3.20)$$

und damit

$$\mathcal{F}^\pm[\cos(2\pi a x)] = \frac{\delta_a + \delta_{-a}}{2} \quad \text{und} \quad \mathcal{F}^\pm[\sin(2\pi a x)] = \mp \frac{\delta_a - \delta_{-a}}{2i}, \quad (1.3.21)$$

sowie

$$\frac{1}{2a} \mathcal{F}^\pm \chi_{[-a,a]} = \frac{1}{\pm 4\pi i a \xi} \mathcal{F}^\pm[\delta_{-a} - \delta_a] = \frac{\sin(2\pi a \xi)}{2\pi a \xi} = \text{sinc } 2a\xi. \quad (1.3.22)$$

Dabei bezeichnet  $\text{sinc } x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$  den *sinus cardinalis*. □

Setzt man  $\mathcal{O}'_c(\mathbb{R}) = \mathcal{F}\mathcal{O}_M(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , so kann man die Faltung für temperierte Distributionen durch

$$\mathcal{F}^\pm[\Phi * \Psi] = \mathcal{F}^\pm[\Phi] \mathcal{F}^\pm[\Psi] \quad (1.3.23)$$

<sup>5</sup>Das erübrigt nicht das Lösen von Aufgabe 1.7, da wir dies ja für die Fouriersche Inversionsformel gebraucht haben...

für  $\Phi \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$ ,  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  definieren. Sind beide Distributionen regulär, so gilt

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy, \quad (1.3.24)$$

ist eine regulär, die zweite ein Maß, so erhält man entsprechend

$$\mu * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y)d\mu(y), \quad (1.3.25)$$

vorausgesetzt die Integrale existieren.<sup>6</sup> Distributionen aus  $\mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$  werden als schnell fallend bezeichnet.

**Beispiel 1.3.12.** Es gilt  $\delta_0 * \Psi = \Psi$  und  $\delta_x * \Psi = T_x \Psi$ . □

**Beispiel 1.3.13.** Es gilt  $(\partial_x^k \delta_0) * \Psi = \partial_x^k \Psi$ . □

**Proposition 1.3.14.** *Faltung mit einer  $\mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$ -Distribution ist stetig auf  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , d.h. gilt  $\Psi_n \rightarrow \Psi$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , so folgt für jedes  $\Phi \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$ , daß  $\Phi * \Psi_n \rightarrow \Phi * \Psi$  strebt.*

*Beweis.* Folgt direkt aus der Stetigkeit der Fouriertransformation und der Stetigkeit des Multiplikationsoperators mit einer  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ -Funktion. □

Falten glättet. Das bestmögliche Ergebnis liefert nachfolgendes Lemma.

**Lemma 1.3.15.** *Sei  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Ist  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , so gilt  $f\Psi \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$  und  $f * \Psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ .*

*Beweis.* Zum Beweis benötigen wir eine Darstellung für  $f * \Psi$ . Nehmen wir vorerst an,  $\Psi = g$  sei regulär. Dann gilt

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy = \langle g, T_x \tilde{f} \rangle$$

wobei  $\tilde{f}(z) = f(-z)$  gesetzt ist. Da die rechte Seite für alle Distributionen  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  definiert ist, kann man  $\Psi * f(x) = \langle \Psi, T_x \tilde{f} \rangle$  definieren. Wir zeigen, daß die so definierte Funktion zu  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  gehört und sie  $\mathcal{F}[\Psi * f] = \mathcal{F}f \mathcal{F}\Psi$  erfüllt.

*Schritt 1:*  $\Psi * f$  ist stetig. Es gilt für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} p_{k,\ell}(T_h f - f) &= \|X^k T_h D^\ell f - X^k D^\ell f\| = \|T_h(X+h)^k D^\ell f - X^k D^\ell f\|_1 \\ &\leq \|T_h X^k D^\ell f - X^k D^\ell f\|_1 + h \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} \|X^j D^\ell f\|_1 \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

unter Ausnutzung der Stetigkeit im Mittel. Also gilt  $T_h \rightarrow 0$  punktweise auf  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  und damit

$$|\Psi * f(x+h) - \Psi * f(x)| = |\langle \Psi, T_h T_x \tilde{f} - T_x \tilde{f} \rangle| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Weiter gilt mit einer endlichen Indexmenge  $J$

$$|\Psi * f(x)| = |\langle \Psi, T_x \tilde{f} \rangle| \leq \sum_{(k,l) \in J} c_{k,l} \|\xi^k \partial_\xi^\ell T_x \tilde{f}(\xi)\|_\infty = \sum_{(k,l) \in J} c_{k,l} \|(\xi+x)^k \partial_\xi^\ell \tilde{f}(\xi)\|_\infty.$$

<sup>6</sup>Die Existenz wäre noch zu zeigen...

Der letzte Ausdruck ist ein Polynom in  $x$ .

*Schritt 2:* Differenzierbarkeit. Dazu nutzt man

$$\partial_x(\Psi * f) = \partial_x \langle \Psi, T_x \tilde{f} \rangle = -\langle \Psi, T_x \partial_x \tilde{f} \rangle = \Psi * \partial_x f$$

in Verbindung mit Schritt 1. Insbesondere folgt damit, daß alle Ableitungen von  $\Psi * f$  polynomial beschränkt sind, also  $\Psi * f \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  gilt.

*Schritt 3:* Da insbesondere das oben definierte  $\Psi * f$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  liegt, können wir seine Fouriertransformation berechnen. Es gilt für alle  $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\Psi * f], h \rangle &= \langle \Psi * f, \mathcal{F}h \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} [\Psi * f](x) \mathcal{F}h(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \Psi, T_x \tilde{f} \rangle \mathcal{F}h(x) dx \\ &= \left\langle \Psi, \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \mathcal{F}h(x) dx \right\rangle_y = \langle \Psi, \tilde{f} * \mathcal{F}h \rangle = \langle \mathcal{F}\Psi, \mathcal{F}^{-1}[\tilde{f}] h \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}[f] \mathcal{F}[\Psi], h \rangle \end{aligned}$$

da die das innere Integral definierenden Riemannschen Summen in  $\mathcal{S}(R)$  gegen die Faltung konvergieren.<sup>7</sup> □

**Korollar 1.3.16.**  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  ist dicht in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

*Beweis.* Wählen wir ein  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  mit  $\mathcal{F}[g](0) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx = 1$ , so gilt mit  $g_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon} g(\frac{x}{\epsilon})$  wegen Beispiel 1.3.10  $g_\epsilon * \Psi \rightarrow \Psi$  für alle  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Es gilt aber  $g_\epsilon * \Psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$ . □

Für eine Distribution  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  definiert man den Träger  $\text{supp } \Psi$  als die (abgeschlossene) Teilmenge von  $\mathbb{R}$ , auf der  $\Psi$  von Null verschieden ist, d.h.

$$x \notin \text{supp } \Psi \iff \exists \epsilon > 0 \forall \phi \in C_0^\infty(U_\epsilon(x)) : \langle \Psi, \phi \rangle = 0. \quad (1.3.26)$$

**Lemma 1.3.17.** Sei  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Ist  $\text{supp } \Psi$  kompakt, so gilt  $\Psi \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$ . Darüberhinaus ist

$$\mathcal{F}^\pm \Psi(x) = \langle \Psi, e^{\pm 2\pi i x \xi} \phi(\xi) \rangle \quad (1.3.27)$$

für ein (jedes)  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  mit  $\phi(\xi) = 1$  auf  $\text{supp } \Psi$ .

*Beweis.* Da  $\mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  dicht in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  ist, kann man sich auf  $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  beschränken. Dann ist die Aussage aber offensichtlich. □

## Aufgaben

**Aufgabe 1.17.** Sei  $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  mit  $g(x)(1+x^2)^{-N/2} \in L^1(\mathbb{R})$  für ein hinreichend großes  $N$ . Gilt

$$\langle g, f \rangle = 0 \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (1.3.28)$$

so folgt  $g = 0$ .

---

<sup>7</sup>Wäre noch nachzurechnen. . .

**Aufgabe 1.18.** Sei  $g \in L^1(\mathbb{R})$  man zeige, daß dann die Fouriertransformation  $\mathcal{F}g$  im Sinne von Abschnitt 1.1 und die distributionelle Fouriertransformation  $\mathcal{F}g$  übereinstimmen.

**Aufgabe 1.19.** Man berechne  $\mathcal{F}p$  für ein Polynom  $p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j$  vom Grad  $n$ .

**Aufgabe 1.20.** Sei  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Man zeige, daß dann ein Maß  $\mu \in \mathbb{M}(\mathbb{R})$  (eine Funktion  $f \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $p \in (1, \infty)$ ) und ein Differentialoperator  $P(x, \partial_x) = \sum_{k=1}^n p_k(x) \partial_x^k$  mit polynomialen Koeffizienten existiert, so daß

$$\Psi = P(x, \partial_x)\mu \quad (\Psi = P(x, \partial_x)f) \quad (1.3.29)$$

gilt. (Hinweis: Beschränktheit von  $\Psi$  nutzen, um mit Rieszischem Darstellungssatz  $\mu$  (bzw.  $f$ ) zu konstruieren.)

**Aufgabe 1.21.** 1. Sei  $\Phi \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$ . Zeige, daß  $x^\ell \partial_x^k \Psi \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$  für alle  $k$  und  $\ell$ .

2. Sei  $\Phi \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$  und  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Zeige, daß dann

$$\partial_x(\Phi * \Psi) = (\partial_x \Phi) * \Psi \quad (1.3.30)$$

gilt.

**Aufgabe 1.22.** Sei  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

- a) Zeige, daß  $x\Psi = 0$  genau dann gilt, wenn  $\Psi = c\delta_0$  mit einem  $c \in \mathbb{C}$  gilt.
- b) Analog folgere man, daß  $x^{k+1}\Psi = 0$  genau dann gilt, wenn  $\Psi = p(D)\delta_0$  mit einem Polynom  $p$  vom Grad  $k$  gilt.

*Hinweis: Es gilt folgender Satz: Jede Distribution  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp } \Psi \subseteq \{a\}$  für ein  $a \in \mathbb{R}$  besitzt die Darstellung  $\Psi = \sum_{k=0}^n c_k \partial_x^k \delta_a$  mit Konstanten  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $c_k \in \mathbb{C}$ .*

## 1.4 Die Poissonsche Summationsformel und Fourierreihen

Eine Distribution  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  heißt  $a$ -periodisch ( $a > 0$ ), falls

$$T_a \Psi = \Psi \quad (1.4.1)$$

gilt. Periodische Distributionen sind durch Fourierreihen darstellbar.

**Satz 1.4.1.** Sei  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Die folgenden beiden Aussagen sind äquivalent:

1.  $\Psi$  ist  $a$ -periodisch.
2.  $\mathcal{F}\Psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{ka^{-1}}$  mit Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $|c_k| \leq C(1 + k^2)^{N/2}$ .
3.  $\Psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i k a^{-1} x}$  mit Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$ ,  $|c_k| \leq C(1 + k^2)^{N/2}$ .

*Beweis.* Da  $T_a\Psi = \Psi$  gilt, folgt  $M_a\mathcal{F}\Psi = \mathcal{F}\Psi$  und damit

$$(e^{2\pi i ax} - 1) \mathcal{F}\Psi = 0. \quad (1.4.2)$$

Da der erste Faktor genau bei  $ax \in \mathbb{Z}$  einfache Nullstellen besitzt, folgt (vgl. Aufgabe 1.22)

$$\mathcal{F}\Psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{ka^{-1}} \quad (1.4.3)$$

mit Koeffizienten  $c_k \in \mathbb{C}$ . Die polynomiale Schranke folgt aus der Stetigkeit von  $\mathcal{F}\Psi$ .

Umgekehrt erfüllt jede derartige Distribution Gleichung (1.4.2) und nach Anwendung der Fouriertransformation erhält man eine  $a$ -periodische Distribution.

Die dritte Aussage entspricht der zweiten nach Anwendung der Fouriertransformation.  $\square$

Wir wollen vorerst einen wichtigen Spezialfall betrachten. Sei wiederum  $a > 0$  die Periode und

$$\Lambda_a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{ak} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \quad (1.4.4)$$

der *Dirac-Kamm* zur Gitterweite  $a$ . Dann ist  $\Lambda_a$  sowohl unter  $T_a$  als auch unter  $M_{a^{-1}}$  invariant.

**Korollar 1.4.2 (Poissonsche Summationsformel).** *Es gilt  $\mathcal{F}^\pm \Lambda_a = a^{-1} \Lambda_{a^{-1}}$ . Insbesondere gilt  $\mathcal{F}^\pm \Lambda_1 = \Lambda_1$ .*

*Beweis.* Da  $\Lambda_a$  unter  $M_{a^{-1}}$  invariant ist, ist  $\mathcal{F}\Lambda_a$  eine  $a^{-1}$ -periodische Distribution. Anwendung des vorigen Satzes liefert, daß

$$\mathcal{F}\Lambda_a = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(a) \delta_{a^{-1}k} = c(a) \Lambda_{a^{-1}} \quad (1.4.5)$$

mit einem einheitlichen  $c = c(a)$  gilt. Es bleibt diese Konstante zu berechnen. Dazu beachten wir, daß  $\Lambda_a$  durch Skalierung aus  $\Lambda_1$  hervorgeht. Da  $\mathcal{F}[f(ax)] = 1/a \mathcal{F}[f](x/a)$  gilt, muß  $c(a) = c/a$  für eine von  $a$  unabhängige Konstante gelten.

Beachten wir nun, daß  $a\Lambda_a \rightarrow 1$  für  $a \rightarrow 0$  gegen das Riemann-Integral

$$\langle 1, f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (1.4.6)$$

konvergiert und andererseits  $\Lambda_{a^{-1}} \rightarrow \delta_0$  für  $a \rightarrow 0$  gilt, so folgt  $c = 1$  und damit die Behauptung.  $\square$

Um die Aussagen über Fourierreihen zu komplettieren, benötigen wir noch eine Vorschrift zur Berechnung der Fourierkoeffizienten. Dazu nutzen wir die Idee der Periodisierung einer Distribution / Funktion. Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann sei

$$\Pi_a f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - ka). \quad (1.4.7)$$

Wegen

$$\int_{-a/2}^{a/2} \Pi_a f(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-a/2}^{a/2} f(x - ka) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

konvergiert diese Reihe in  $L^1(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$  und  $\|\Pi_a\| = 1$ . Setzt man  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  voraus, so konvergiert die Reihe gleichmäßig über  $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ . Ist  $f \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$ , so kann man  $\Pi_a \Psi = \Lambda_a * \Psi$  definieren.

Wir suchen eine Funktion  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , so daß  $\Pi_a f = 1$  gilt. Ist dann  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  eine  $a$ -periodische Distribution, so gilt  $\Psi = \Pi_a(f\Psi)$  und  $f\Psi \in \mathcal{O}'_c(\mathbb{R})$ , vgl. Aufgabe 1.23.

**Lemma 1.4.3.** *Sei  $f \in L^1(\mathbb{R})$ . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  $\Pi_a f = 1$ .
2.  $\mathcal{F}[f](0) = a$  und  $\mathcal{F}[f](ka^{-1}) = 0$  für  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

*Beweis.* Es gilt  $\Lambda_a * f = 1$  genau dann, wenn  $a^{-1}\Lambda_{a^{-1}}\mathcal{F}f = \delta_0$  gilt. Damit muß aber  $\mathcal{F}[f](ka^{-1}) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und  $\mathcal{F}[f](0) = a$  gelten.  $\square$

Damit ergeben sich nun Formeln für die Berechnung der Fourierkoeffizienten. Es gilt

**Satz 1.4.4.** *Sei  $\Psi$  eine  $a$ -periodische Distribution. Dann gilt*

$$\Psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i a^{-1} k x} \tag{1.4.8}$$

als  $\mathcal{S}'$ -konvergente Reihe mit Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{a} \langle \Psi, \phi_a(x) e^{2\pi i a^{-1} k x} \rangle \tag{1.4.9}$$

(wobei  $\phi_a \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  die Bedingung  $\Pi_a \phi_a = 1$  erfüllt.)

*Beweis.* Wir nutzen Satz 1.4.1. Damit gilt  $\mathcal{F}\Psi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \delta_{a^{-1}k}$ . Um den Koeffizienten  $c_k$  zu extrahieren, müssen wir damit  $\mathcal{F}\Psi$  auf eine Testfunktion  $f_k$  anwenden, die genau an den Stellen  $a^{-1}\ell$  für  $\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{k\}$  verschwindet und an der Stelle  $k$  den Wert 1 annimmt. Nach Lemma 1.4.3 ist aber gerade  $a^{-1}T_{a^{-1}k}\mathcal{F}^{-}\phi_a$  so eine Funktion, also

$$\begin{aligned} c_k &= a^{-1} \langle \mathcal{F}\Psi, T_{a^{-1}k}\mathcal{F}^{-}\phi_a \rangle = a^{-1} \langle \mathcal{F}\Psi, \mathcal{F}^{-}M_{a^{-1}k}\phi_a \rangle \\ &= a^{-1} \langle \Psi, M_{a^{-1}k}\phi_a \rangle = a^{-1} \langle \Psi, \phi_a(x) e^{2\pi i a^{-1} k x} \rangle. \end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung:** Mit ähnlicher Argumentation kann man für  $\Psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  (d.h.  $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  und  $\Psi$   $a$ -periodisch) die *Eulersch-Fourierschen Formeln* für die Fourierkoeffizienten ableiten. Da dann  $\Psi$  glatt ist, kann man  $\phi_a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp } \phi_a$  kompakt und  $\Pi_a \phi_a = 1$  wählen (und die Anwendung macht, andersherum gelesen, immer noch Sinn). Speziell für  $\phi_a = \chi_{[-a/2, a/2]}$  folgt

$$c_k = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} \Psi(x) e^{2\pi i a^{-1} k x} dx. \tag{1.4.10}$$

**Korollar 1.4.5.** Ist  $f \in L^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$  eine  $a$ -periodische Funktion, so gilt

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-2\pi i a^{-1} k x} \quad (1.4.11)$$

als in  $L^2(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$  konvergente Reihe mit

$$c_k = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) e^{2\pi i a^{-1} k x} dx = a^{-1} (f | e^{-2\pi i a^{-1} k x})_{L^2(-a/2, a/2)}. \quad (1.4.12)$$

*Beweis.* Die Darstellung als in  $\mathcal{S}'$  konvergente Reihe liefert obiger Satz. Da wegen

$$\int_{-a/2}^{a/2} e^{2\pi i a^{-1} (k-\ell)x} dx = \frac{a}{2\pi i (k-\ell)} e^{2\pi i a^{-1} (k-\ell)x} \Big|_{-a/2}^{a/2} = 0 \quad (1.4.13)$$

für  $k \neq \ell$  und entsprechend  $\dots = a$  für  $k = \ell$  die Funktionen  $x \mapsto a^{-1/2} e^{2\pi i a^{-1} k x}$  ein Orthonormalsystem bilden, ist die Reihe auch im Hilbertraum  $L^2(-a/2, a/2)$  konvergent. Die Eindeutigkeit des Grenzwertes (zusammen mit der stetigen Einbettung der periodischen Fortsetzung von  $L^2(-a/2, a/2)$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ) liefert die Behauptung.  $\square$

Die Hilbertraumtheorie liefert unmittelbar noch folgende Beziehung:

**Korollar 1.4.6.** Ist  $f \in L^2(\mathbb{R})$  eine  $a$ -periodische Funktion, so gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\int_{-a/2}^{a/2} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2. \quad (1.4.14)$$

## Aufgaben

**Aufgabe 1.23.** Sei  $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  eine Funktion mit  $\Pi_a \phi = 1$ . Dann gilt für jedes  $a$ -periodische  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$

$$\Pi_a(\phi_a \Psi) = \Psi. \quad (1.4.15)$$

**Aufgabe 1.24 (Poissonsche Summationsformel).** Sei  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Man zeige, daß dann

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[f](x + ka) = a^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i a^{-1} k x} f(a^{-1} k). \quad (1.4.16)$$

und insbesondere

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[f](ka) = a^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(a^{-1} k) \quad (1.4.17)$$

gilt.

**Aufgabe 1.25.** Man nutze die Poissonsche Summationsformel um folgende Reihen zu berechnen

$$\text{a) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \quad \text{b) } \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{2\pi i a^{-1} k x} \operatorname{sinc}(a^{-1} k)$$

**Aufgabe 1.26.** Die Riemannsche  $\vartheta$ -Funktion ist durch die Reihe

$$\vartheta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2\pi x} \quad (1.4.18)$$

definiert. Man nutze die Poissonsche Summationsformel, um die Funktionalgleichung

$$\frac{1 + 2\vartheta(x)}{1 + 2\vartheta(1/x)} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad (1.4.19)$$

zu zeigen.

**Aufgabe 1.27 (Shannon-Nyquist-Sampling-Theorem).** Sei  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  eine temperierte Distribution mit  $\text{supp } \mathcal{F}\Psi \subseteq (-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$ .<sup>8</sup> Dann gilt  $\Psi \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R})$  und

$$\Psi(x) = \text{sinc}(ax) * \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi(a^{-1}k) \delta_{a^{-1}k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi(a^{-1}k) \text{sinc}(ax - k) \quad (1.4.20)$$

als in  $\mathcal{S}'$  konvergente Reihe.

Gilt zusätzlich  $|\Psi(x)| \leq (1 + x^2)^{-\epsilon/2}$ , so konvergiert die Reihe lokal gleichmäßig.

---

<sup>8</sup>Wir fordern das der Träger von  $\mathcal{F}\Psi$  abgeschlossenes Teilintervall ist, also  $\mathcal{F}\Psi$  an beiden Randpunkten  $\pm \frac{a}{2}$  verschwindet. Will man  $\text{supp } \mathcal{F}\Psi = [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$  zulassen, so benötigt man eine Glattheitsvoraussetzung an  $\mathcal{F}\Psi$  an den Randpunkten.



## 2 Phasenraumanalyse

Nachdem wir im Kapitel 1 nicht zwischen der Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  und ihrer Inversen  $\mathcal{F}^{-1}$  unterschieden haben, wollen wir von nun an eine Unterscheidung festlegen. Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ein Signal. Dann sprechen wir von der *Zeitdarstellung*  $f = f(x)$  (bzw.  $f = f(t)$ ) des Signals und nennen

$$\hat{f}(\xi) = \mathcal{F}^{-1}[f](\xi) \quad (2.0.1)$$

seine *Frequenzdarstellung*. Es soll nun untersucht werden, inwieweit man beides kombinieren kann. Ziel ist also, Methoden zu untersuchen, die gleichzeitig beide Darstellungsmöglichkeiten kombinieren, also Aussagen zu treffen, die sowohl “für ein bestimmtes  $x$ -Intervall” als auch “für ein bestimmtes Frequenz- ( $\xi$ -) Intervall” gelten.

Weiterhin wollen wir uns im folgenden im wesentlichen auf *Signale endlicher Energie*, d.h. auf  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , beschränken. Nach dem Satz von Plancherel wissen wir, daß die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  ein unitärer Operator auf  $L^2(\mathbb{R})$  ist, also  $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$  gilt.

### 2.1 Die Heisenbergsche Unschärferelation

Dem Wunschdenken sind schnell Grenzen gesetzt, wie folgendes Lemma zeigt:

**Lemma 2.1.1.** *Sei  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp } \Psi$  kompakt und  $\text{supp } \mathcal{F}\Psi$  kompakt. Dann gilt  $\Psi = 0$ .*

*Beweis.* Durch Skalierung können wir  $\text{supp } \Psi \subseteq (0, 1)$  erreichen. Wir setzen  $\Psi$  1-periodisch fort und entwickeln in eine Fourier-Reihe. Dann gilt

$$\Pi_1 \Psi = \sum_n c_n e^{2\pi i n x}$$

mit Koeffizienten (wobei  $\Pi_1 \phi_1 = 1$  gefordert sei)

$$c_n = \langle \Pi_1 \Psi, \phi_1 e^{-2\pi i n x} \rangle = \langle \Psi, e^{-2\pi i n x} \rangle = \mathcal{F}\Psi(-n)$$

und damit  $c_n = 0$  für  $|n| > N$  mit einem  $N \in \mathbb{N}$ . Also ist  $\Psi$  ein trigonometrisches Polynom

$$\Psi = \sum_{|n| \leq N} c_n e^{2\pi i n x}.$$

Das einzige trigonometrische Polynom mit kompaktem Träger ist die Nullfunktion und der Beweis ist beendet.  $\square$

Es können also eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und ihre Fouriertransformierte nicht beide beliebig lokalisiert sein. Eine erste genaue Formulierung dieses Sachverhalts liefert nachfolgender Satz. Wir setzen dazu  $Xf(x) = xf(x)$  und  $\Xi \hat{f}(\xi) = \xi \hat{f}(\xi)$ .

**Satz 2.1.2 (Heisenberg-Pauli-Weyl'sche Unschärferelation).** Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\|(X - x_0)f\|_2 \|(\Xi - \xi_0)\hat{f}\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2. \quad (2.1.1)$$

Dabei gilt Gleichheit genau dann, wenn  $f$  ein Vielfaches von

$$e^{2\pi i \xi_0(x-x_0)} e^{-\pi(x-x_0)^2/c} \quad (2.1.2)$$

mit  $c > 0$  ist.

Wir führen den Beweis in mehreren Teilschritten. Für zwei lineare (und möglicherweise unbeschränkte) Operatoren eines Hilbertraumes  $\mathbb{H}$  sei

$$[A, B] = AB - BA \quad (2.1.3)$$

ihr Kommutator. Ist  $[A, B] \neq 0$ , so liefert das folgende Lemma die Kernaussage des Satzes 2.1.2.

**Lemma 2.1.3 (abstrakte Unschärferelation).** Seien  $A$  und  $B$  selbstadjungierte Operatoren eines Hilbertraumes  $\mathbb{H}$ , so gilt

$$\|(A - a)f\| \|(B - b)f\| \geq \frac{1}{2} |[A, B]f | f| \quad (2.1.4)$$

für alle  $a, b \in \mathbb{R}$  und alle  $f \in \text{Dom}(AB) \cap \text{Dom}(BA)$ . Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn  $(A - a)f = ic(B - b)f$  für ein  $c \in \mathbb{R}$ .

*Beweis.* Es gilt  $[A, B] = [A - a, B - b] = (A - a)(B - b) - (B - b)(A - a)$  und damit

$$\begin{aligned} ([A, B]f | f) &= (((A - a)(B - b) - (B - b)(A - a))f | f) \\ &= ((B - b)f | (A - a)f) - ((A - a)f | (B - b)f) \\ &= 2i \text{Im} ((B - b)f | (A - a)f), \end{aligned}$$

so daß mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$|[A, B]f | f| \leq 2|((B - b)f | (A - a)f)| \leq 2\|(A - a)f\| \|(B - b)f\|$$

folgt. Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn einerseits  $((B - b)f | (A - a)f)$  rein imaginär ist und andererseits für die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung  $(A - a)f = \lambda(B - b)f$  mit einem  $\lambda \in \mathbb{C}$  gilt. Diese beiden Aussagen implizieren  $\lambda = ic$  mit  $c \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Als Operatoren wählen wir nun die (unbeschränkten) Operatoren  $X$  und  $D = \mathcal{F}\Xi\mathcal{F}^-$  auf  $L^2(\mathbb{R})$ ,

$$Xf(x) = xf(x) \quad \text{und} \quad Df(x) = \frac{1}{2\pi i} f'(x), \quad (2.1.5)$$

größter gemeinsamer Definitionsbereich ist dabei

$$\{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid xf(x), f'(x), xf'(x) \in L^2(\mathbb{R})\}. \quad (2.1.6)$$

Weiterhin gilt

$$[X, D]f(x) = \frac{1}{2\pi i}(xf'(x) - (xf)'(x)) = -\frac{1}{2\pi i}f(x). \quad (2.1.7)$$

Beide Operatoren hängen eng mit den Operationen der Translation  $T_x$  und der Modulation  $M_\xi$  zusammen. Es gilt

$$\left. \frac{d}{d\xi} M_\xi f \right|_{\xi=0} = 2\pi i X f \quad \text{und} \quad \left. \frac{d}{dx} M_x f \right|_{x=0} = 2\pi i D f. \quad (2.1.8)$$

*Beweis zu Satz 2.1.2.* Angenommen  $f$  gehört zum Definitionsbereich von  $X$ ,  $D$ ,  $DX$  und  $XD$ . Dann folgt wegen  $[X, D] = 2\pi i$  aus Lemma 2.1

$$\frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2 = \frac{1}{2} |([X, D]f | f)| \leq \|(X - a)f\|_2 \|(D - b)f\|_2. \quad (2.1.9)$$

Mit dem Satz von Plancherel schreiben wir den zweiten Faktor um als

$$\|(D - b)f\|_2 = \|\mathcal{F}(D - b)f\|_2 = \|(\Xi - b)\hat{f}\|_2, \quad (2.1.10)$$

$\Xi \hat{f}(\xi) = \xi \hat{f}(\xi)$ . Damit Gleichheit gilt, muß  $(D - b)f = ic(X - a)f$  für ein  $c \in \mathbb{R}$  gelten. Dies entspricht aber der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$f' - 2\pi ibf = -2\pi c(x - a)f, \quad (2.1.11)$$

deren Lösungen gerade die Vielfachen von  $e^{2\pi ib(x-a)}e^{-\pi(x-a)^2/c}$  sind.  $\square$

Wir wollen noch einige alternative Formulierungen der Unschärferelation angeben. Für  $f \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $\|f\|_2 = 1$  definieren wir die Standardabweichungen bzw. Varianzen

$$\Delta_f x = \inf_{x_0} \|(X - x_0)f\|_2 = \inf_{x_0} \left( \int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1.12)$$

und

$$\Delta_f \xi = \inf_{\xi_0} \|(\Xi - \xi_0)\hat{f}\|_2 = \inf_{\xi_0} \left( \int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.1.13)$$

Dann erhält man die wohl bekannteste Formulierung der Unschärferelation:

**Korollar 2.1.4 (Heisenbergsche Unschärferelation).** Für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$  mit  $\|f\|_2 = 1$  gilt

$$\Delta_f x \cdot \Delta_f \xi \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (2.1.14)$$

**Korollar 2.1.5.** Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$\|Xf\|_2^2 + \|Df\|_2^2 \geq \frac{1}{2\pi} \|f\|_2^2. \quad (2.1.15)$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn  $f(x) = ce^{-\pi x^2}$ .

*Beweis.* Wir nutzen  $2ab \leq a^2 + b^2$  und wenden sie auf Satz 2.1.2 mit  $x_0 = \xi_0 = 0$  an. Gleichheit gilt genau dann, wenn  $a = b$ .  $\square$

**Bemerkung:** Die letzte Aussage entspricht einer Einbettungsrelation zwischen Funktionenräumen. Definiert man den Banachraum  $\dot{H}^{1,1}(\mathbb{R})$  als Abschluß von  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in der Norm

$$\|f\|_{\dot{H}^{1,1}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (|f(x)|^2 + |\hat{f}(x)|^2) x^2 dx, \quad (2.1.16)$$

so gilt  $\dot{H}^{1,1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$ .

## 2.2 Zeit-Frequenz-Lokalisation

Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  gegeben. Seien weiter  $T, \Omega \subseteq \mathbb{R}$  Mengen endlichen Maßes,  $|T|, |\Omega| < \infty$ . Dann kann man die Projektionsoperatoren

$$P_T f(x) = \chi_T(x) f(x) \quad (2.2.1)$$

mit der charakteristischen Funktion

$$\chi_T(x) = \begin{cases} 1, & x \in T, \\ 0, & x \notin T \end{cases} \quad (2.2.2)$$

und entsprechend

$$Q_\Omega f(x) = \mathcal{F}[\chi_\Omega(\xi) \hat{f}(\xi)] = \mathcal{F} P_\Omega \mathcal{F}^{-1} f \quad (2.2.3)$$

betrachten. Beide Projektionsoperatoren sind orthogonal in  $L^2(\mathbb{R})$  und es gilt für ihre Verkettung

$$Q_\Omega P_T f(x) = \int_{\Omega} e^{2\pi i x \omega} \int_T e^{-2\pi i t \omega} f(t) dt d\omega. \quad (2.2.4)$$

Da mit der Hölderschen Ungleichung  $L^2(T) \subseteq L^1(T)$  für  $|T| < \infty$  gilt, kann man den Satz von Fubini anwenden und erhält die Darstellung

$$Q_\Omega P_T f(x) = \int_T \int_{\Omega} e^{2\pi i(x-t)\omega} d\omega f(t) dt = \int_T K(x, t) f(t) dt. \quad (2.2.5)$$

als Integraloperator. Wir zeigen  $K \in L^2(\mathbb{R} \times T)$ , der Operator ist also Hilbert-Schmidt.<sup>1</sup> Es gilt

$$\begin{aligned} \|Q_\Omega P_T\|_{2 \rightarrow 2} &\leq \|Q_\Omega P_T\|_{HS} = \left( \int_{\mathbb{R} \times T} |K(x, t)|^2 dx \otimes dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_T \|T_t \mathcal{F} \chi_\Omega\|_2^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = |\Omega|^{\frac{1}{2}} |T|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

da sowohl die Translation  $T_t$  als auch die Fouriertransformation  $\mathcal{F}$  unitär sind.

Wir können dies ausnutzen um eine neue Version der Unschärferelation zu formulieren. Wir sagen, die Funktion  $f$  sei  $\epsilon$ -konzentriert in  $T$ , falls

$$\|f - P_T f\|_2 \leq \epsilon \|f\|_2 \quad (2.2.6)$$

<sup>1</sup>Ein Operator  $K : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  ist ein Hilbert-Schmidt-Operator genau dann, wenn er als Integraloperator mit einem Kern  $K \in L^2(\mathbb{R}^2)$  geschrieben werden kann.

und entsprechend  $\hat{f}$   $\epsilon$ -konzentriert in  $\Omega$ , falls

$$\|f - Q_\Omega f\|_2 \leq \epsilon \|f\|_2 \quad (2.2.7)$$

gilt. Ist  $f$  sowohl auf  $T$  als auch auf  $\Omega$   $\epsilon$ -konzentriert, so heißt  $f$  auf  $T \times \Omega$   $\epsilon$ -konzentriert. Es können nicht gleichzeitig  $T$  und  $\Omega$  klein sein.

**Satz 2.2.1 (Unschärferelation nach Donoho und Stark).** *Sei  $0 \neq f \in L^2(\mathbb{R})$  und gelte für  $T, \Omega \subseteq \mathbb{R}$  daß*

$$\|f - P_T f\|_2 \leq \epsilon_T \|f\|_2 \quad \text{und} \quad \|f - Q_\Omega f\|_2 \leq \epsilon_\Omega \|f\|_2. \quad (2.2.8)$$

Dann gilt

$$|T| |\Omega| \geq (1 - \epsilon_T - \epsilon_\Omega)^2. \quad (2.2.9)$$

*Beweis.* Es gilt

$$\|f - Q_\Omega P_T f\|_2 \leq \|f - Q_\Omega f\|_2 + \|Q_\Omega(f - P_T f)\|_2 \leq (\epsilon_\Omega + \epsilon_T) \|f\|_2$$

da  $\|Q_\Omega\|_{2 \rightarrow 2} \leq 1$ . Also folgt insbesondere

$$\|Q_\Omega P_T f\|_2 \geq \|f\|_2 - \|f - Q_\Omega P_T f\|_2 \geq (1 - \epsilon_T - \epsilon_\Omega) \|f\|_2.$$

Nun haben wir oben die Operatornorm  $\|Q_\Omega P_T\|_{2 \rightarrow 2} \leq |T|^{\frac{1}{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}}$  abgeschätzt, es folgt also

$$(1 - \epsilon_T - \epsilon_\Omega) \|f\|_2 \leq \|Q_\Omega P_T f\|_2 \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} |T|^{\frac{1}{2}} \|f\|_2$$

und der Beweis ist beendet.  $\square$

Will man also Funktionen  $f \in L^2(\mathbb{R})$  aus Bausteinen zusammensetzen, die im Phasenraum  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$  in gewissen Gebieten  $T \times \Omega$  konzentriert sind, so muß der *Flächeninhalt* des Gebietes  $|T \times \Omega| \geq 1$  groß genug sein.

Wir wollen Operatoren betrachten, die eine Funktion  $f \in L^2(\mathbb{R})$  auf einen derartigen Baustein projizieren. Ein erster Kandidat wäre  $Q_\Omega P_T$  oder  $P_T Q_\Omega$ . Da  $[Q_\Omega, P_T] \neq 0$  gilt (warum?) handelt es sich nicht um Projektionsoperatoren im eigentlichen Sinne.

Etwas abstrakter sei  $a(x, \xi) \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  eine Funktion auf  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$ , als spezielles Beispiel möge man an  $a(x, \xi) = \chi_T(x) \chi_\Omega(\xi)$  denken. Dann liefert der Operator

$$K_a : L^2(\mathbb{R}) \ni f \mapsto Af(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i x \xi} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) d\xi \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2.2.10)$$

eine Verallgemeinerung von  $P_T Q_\Omega$ . Durch Anwendung des Satzes von Fubini erhalten wir wieder eine Darstellung als Integraloperator

$$K_a f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_a(x, y) f(y) dy, \quad K_a(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-y)\xi} a(x, \xi) d\xi. \quad (2.2.11)$$

**Proposition 2.2.2.** *Sei  $a \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ . Dann ist  $K_a$  Hilbert-Schmidt-Operator auf  $L^2(\mathbb{R})$  und es gilt*

$$\|K_a\|_{2 \rightarrow 2} \leq \|K_a\|_{HS} = \|a(x, \xi)\|_{L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})}. \quad (2.2.12)$$

*Beweis.* vgl. Aufgabe 2.3. □

**Korollar 2.2.3.** *Gilt für ein  $0 \neq f \in L^2(\mathbb{R})$  und ein  $a \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  die Abschätzung  $\|f - K_a f\|_2 \leq \epsilon \|f\|_2$ , so folgt  $\|a\|_2 \geq 1 + \epsilon$ .*

Operatoren dieser Bauart wollen wir als *Pseudodifferentialoperatoren* bezeichnen. Beschrieben werden diese Operatoren durch ein *Symbol*  $a(x, \xi)$ , welches eine Funktion im Phasenraum  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$  ist. Die Zuordnung (2.2.10) wird als *Kohn-Nirenberg-Quantisierung* bezeichnet. Dabei ist im allgemeinen das Symbol  $a(x, \xi)$  nicht auf  $L^2$ -Funktionen beschränkt. Zum Beispiel kann mittels Distributionentheorie für alle  $a(x, \xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  ein zugeordneter Operator  $K_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  definiert werden.<sup>2</sup>

Wir wollen noch eine Formel für die Verkettung zweier Operatoren und den adjungierten Operator angeben.

**Lemma 2.2.4.** 1. *Seien  $a, b \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ . Dann gilt  $K_a \circ K_b = K_{a\#b}$  mit dem Leibnizprodukt*

$$a\#b(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y \eta} a(x, \xi + \eta) b(x + y, \xi) dy d\eta \quad (2.2.13)$$

der Symbole  $a(x, \xi)$  und  $b(x, \xi)$ .

2. *Sei  $a \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ . Dann gilt  $K_a^* = K_{a^*}$  mit*

$$a^*(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y \eta} \overline{a(x + y, \xi + \eta)} dy d\eta. \quad (2.2.14)$$

*Beweis.* Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann gilt<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} K_a K_b f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-y)\xi} a(x, \xi) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(y-z)\eta} b(y, \eta) f(z) dz d\eta dy d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-z)\eta} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-y)(\xi-\eta)} a(x, \xi) b(y, \eta) dy d\xi \right] f(z) dz d\eta \end{aligned}$$

und damit (nach Ändern der Bezeichnungen)

$$\begin{aligned} a\#b(x, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(x-y)(\eta-\xi)} a(x, \eta) b(y, \xi) dy d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y \eta} a(x, \xi + \eta) b(x + y, \xi) dy d\eta. \end{aligned}$$

Für die Darstellung des adjungierten Operators nutzen wir für  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} (K_a f | g) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-y)\xi} a(x, \xi) f(y) dy d\xi \overline{g(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(x-y)\xi} a(x, \xi) g(x) dx d\xi} dy \end{aligned}$$

<sup>2</sup>An dieser Stelle nutzt man zum Beispiel die Tensorproduktstruktur des Raumes  $\mathcal{S}'(R^2)$ , d.h. die Menge der Tensorprodukte  $\Phi(x) \otimes \Psi(y)$  mit  $\Phi, \Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  ist dicht in  $\mathcal{S}'(R^2)$ , zusammen mit der Stetigkeit der Zuordnung  $a \mapsto K_a$ .

<sup>3</sup>Die Integrale existieren nicht alle im Lebesgueschen Sinne. Man kann wieder wie bei der Definition der Fouriertransformation vorgehen und  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , sowie  $a, b \in \mathcal{S}(R^2)$  voraussetzen. Dann sind alle Umformungen erlaubt und  $\|a\#b\|_2 \leq \|a\|_2 \|b\|_2$  erlaubt die stetige Fortsetzung.

und damit

$$K_a^*g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-y)\xi} \overline{a(y, \xi)} g(y) dy d\xi.$$

Die Rolle von  $x$  und  $y$  hat sich also vertauscht. Um wieder einen Ausdruck in Kohn-Nirenberg-Quantisierung zu erhalten, nutzen wir die Fouriersche Inversionsformel und gruppieren die Integrationsreihenfolge um.

$$\begin{aligned} K_a^*g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-y)\xi} \overline{a(y, \xi)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(y-z)\eta} g(z) dz d\eta dy d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-z)\eta} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-y)(\xi-\eta)} \overline{a(x, \xi)} dx d\xi \right] g(z) dz d\eta \end{aligned}$$

Nun ergibt sich

$$a^*(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(y-x)(\eta-\xi)} \overline{a(y, \eta)} dy d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y \eta} \overline{a(y+x, \eta+\xi)} dy d\eta.$$

□

Die Kohn-Nirenberg Quantisierung hat einen entscheidenden Nachteil, reellen Symbolen  $a(x, \xi) \in \mathbb{R}$  entsprechen keine selbstadjungierten Operatoren  $K_a$  (wie es zum Beispiel notwendig ist, um Quantenmechanik zu betreiben). Einen Ausweg bietet die *Weyl-Quantisierung*

$$L_a : L^2(\mathbb{R}) \ni f \mapsto L_a f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) f(y) dy d\xi \in L^2(\mathbb{R}) \quad (2.2.15)$$

für  $a(x, \xi) \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ .

**Lemma 2.2.5.** 1. Sei  $a \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ . Dann gilt  $L_a^* = L_{\bar{a}}$ . Insbesondere ist  $L_a$  selbstadjungiert genau dann, wenn das Symbol  $a(x, \xi)$  reell ist.

2. Seien  $a, b \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ . Dann gilt für die Verkettung  $L_a \circ L_b = L_{a \sharp b}$  mit der twisted convolution

$$a \sharp b(x, \xi) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi i(\eta z - \zeta y)} a(x+y, \xi+\eta) b(x+z, \xi+\zeta) dy d\eta dz d\zeta \quad (2.2.16)$$

der Symbole  $a(x, \xi)$  und  $b(x, \xi)$ .

*Beweis.* Wir zeigen hier nur die erste Aussage. Seien  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann gilt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} (L_a f | g) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) f(y) dy d\xi \overline{g(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(y-x)\xi} \bar{a}\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) g(x) dx d\xi} dy = (f | L_{\bar{a}} g). \end{aligned}$$

□

Sowohl Kohn-Nirenberg- als auch Weyl-Operatoren kann man nutzen, um Signale bezüglich Zeit und Frequenz zu lokalisieren. Wir skizzieren hier nur die Idee. Man nutzt dazu eine Zerlegung des Phasenraumes  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$  in *building blocks*  $B_j = T_j \times \Omega_j$ ,  $j \in J$ ,

$$\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi = \bigcup_{j \in J} B_j, \quad |B_k \cap B_\ell| = 0, k \neq \ell, \quad |B_j| > 1, \quad (2.2.17)$$

und eine lokal endliche Zerlegung der Eins,

$$1 = \sum_{j \in J} a_j(x, \xi), \quad a_j(x, \xi) \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi), \quad (2.2.18)$$

so daß der zugehörige Operator  $P_j = K_{a_j}$  (bzw.  $P_j = L_{a_j}$ ) auf  $B_j = T_j \times \Omega_j$   $\epsilon$ -lokalisiert, d.h.

$$\|P_j f - P_{T_j} P_j f\| \leq \epsilon \|P_j f\| \quad \text{und} \quad \|P_j f - Q_{\Omega_j} P_j f\| \leq \epsilon \|P_j f\| \quad (2.2.19)$$

für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$  gilt. (Für praktische Zwecke darf  $\epsilon \in (0, 1)$  auch ‘groß’ sein.)

Zielstellung dabei ist es, daß man  $f$  aus den Bausteinen  $P_j f$  wieder zusammensetzen kann (was zumindest für hinreichend schöne  $a_j(x, \xi)$  aus  $\sum_j a_j(x, \xi) = 1$  folgen sollte) und, daß man die Struktur des Raumes  $L^2(\mathbb{R})$  dabei erhält. Diese Wunschvorstellung ist in folgenden Formeln zusammengefaßt, sie gelten nicht immer, sind also für *jede* zu betrachtende Zerlegung zu beweisen.

**Zielstellung:** Eine *Zeit-Frequenz-Zerlegung*  $P_j$ ,  $j \in J$ , sollte

1. Rekonstruierbarkeit von  $f$

$$f = \sum_{j \in J} P_j f$$

als  $L^2(\mathbb{R})$ -konvergente Reihe,

2. Lokalisationsoperatoren sollten  $\|P_k P_\ell\| \ll 1$  und  $\|P_k P_k - P_k\| \ll 1$  erfüllen und gleichmäßig beschränkt sein,

$$\sup_{j \in J} \|P_j\|_{2 \rightarrow 2} < \infty,$$

3. Rekonstruierbarkeit der Norm aus den Normen der Bausteine, d.h.

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{j \in J} \|P_j f\|_2^2 \leq B \|f\|_2^2$$

sollte mit geeigneten Konstanten  $A, B > 0$  gelten,

erfüllen.

Als Standardbeispiele von Zerlegungen seien hier drei genannt. Bekannteste ist die *Littlewood-Paley Zerlegung* mit unendlichen Blöcken der Form

$$B_{j,\pm} = \mathbb{R}_x \times \pm[2^j, 2^{j+1}], \quad j \in \mathbb{Z}, \pm \in \{+, -\} \quad (2.2.20)$$

(oder  $\pm[2^j, 2^{j+1}] \times \mathbb{R}_\xi$ ). Derartige Zerlegungen spielen eine wichtige Rolle in der Untersuchung von Fouriermultiplikatoren und Differentialoperatoren in Sobolev- und Hölder-Räumen. Littlewood-Paley Zerlegungen sind einfach in dem Sinne, daß sie weit entfernt von den

Grenzen sind, die die Unschärferelation auferlegt. Blöcke der Fläche 1 erhält man dagegen für folgende beiden Zerlegungen. Von *Wavelet-Zerlegungen* spricht man, wenn die Bausteine (*Heisenberg tiles*) die Form

$$B_{j,k,\pm} = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}] \times \pm[2^j, 2^{j+1}], \quad j, k \in \mathbb{Z}, \pm \in \{+, -\} \quad (2.2.21)$$

haben, *Gabor-Zerlegungen* erhält man für

$$B_{j,k} = [j, j+1] \times [k, k+1], \quad j, k \in \mathbb{Z}. \quad (2.2.22)$$

Letztere werden im Kapitel 3 eine entscheidende Rolle spielen.

## Aufgaben

**Aufgabe 2.1.** In Aufgabe 1.16 wurden die Hermite-Funktionen  $\phi_k(x) = (X - iD)^k \phi_0(x)$ , wobei  $\phi_0(x) = e^{-\pi x^2}$  der normalisierte Gauß-Kern ist, eingeführt.

- Sei  $\epsilon \in (0, 1)$ . Man gebe ein  $N = N(k)$  an, so daß  $\phi_k(x)$  auf dem Intervall  $[-N, N]$   $\epsilon$ -konzentriert ist.
- Wie verhält sich das optimale  $N(k)$  für  $k \rightarrow \infty$ ?

**Aufgabe 2.2.** Seien  $\tilde{\phi}_k(x) = \frac{1}{\|\phi_k\|_2} \phi_k(x)$  die normalisierten Hermite-Funktionen.

- Dann gilt für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$  die Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (f | \tilde{\phi}_k) \tilde{\phi}_k(x),$$

sowie die Parseval-Identität

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=0}^{\infty} |(f | \tilde{\phi}_k)|^2.$$

- Zeige: Die Projektion

$$P_{\leq N} : L^2(\mathbb{R}) \ni f \mapsto \sum_{k \leq N} (f | \tilde{\phi}_k) \tilde{\phi}_k(x) \in L^2(\mathbb{R})$$

ist als Kohn-Nirenberg-Operator darstellbar. Wie lautet das zugehörige Symbol  $p_{\leq N}(x, \xi)$ ?

- Man diskutiere, inwieweit das erhaltene System eine Zeit-Frequenz-Zerlegung im Sinne des letzten Abschnittes liefert.

**Aufgabe 2.3.** a) Seien  $a(x, \xi)$  und  $b(x, \xi)$  Symbole,  $a, b \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ . Dann gilt für die Kohn-Nirenberg-Quantisierung  $a \mapsto K_a$

$$K_{a+\lambda b} = K_a + \lambda K_b.$$

Die Kohn-Nirenberg-Quantisierung ist also linear.

b) Zeige, daß für  $a \in L^2(\mathbb{R}^2)$

$$\|a(x, y)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \left( \int_{-\infty}^{\infty} \|a(x, \cdot)\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \| \|a(x, y)\|_{L^2(\mathbb{R}_y)} \|_{L^2(\mathbb{R}_x)}$$

und damit  $L^2(\mathbb{R}^2) = L^2(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^2))$  gilt. Begründe damit, daß für ein Kohn-Nirenberg-Symbol  $a(x, \xi)$  und den Integralkern  $K_a(x, y)$  des zugehörigen Kohn-Nirenberg-Operators

$$\|a(x, \xi)\|_2 = \|K_a(x, y)\|_2$$

und damit  $\|a(x, \xi)\|_2 = \|K_a\|_{HS}$  gilt.

c) Kohn-Nirenberg-Quantisierung ist eine Isometrie zwischen dem Raum  $\mathcal{I}_2(L^2(\mathbb{R}))$  der Hilbert-Schmidt-Operatoren und dem Raum der Symbole  $L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ .

d) Für  $a, b \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  gilt

$$\|a \# b\|_2 \leq \|a\|_2 \|b\|_2.$$

**Aufgabe 2.4.** Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  in  $T \times \Omega \subseteq \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$   $\epsilon$ -konzentriert. Dann ist  $T_a M_b f$  in

$$(T + a) \times (\Omega + b) = \{ (x + a, \xi + b) \mid x \in T, \xi \in \Omega \}$$

$\epsilon$ -konzentriert. Weiterhin ist für  $\lambda > 0$  die skalierte Funktion  $f_\lambda(x) = f(\lambda x)$  in

$$(\lambda^{-1}T) \times (\lambda\Omega) = \{ (\lambda^{-1}x, \lambda\xi) \mid x \in T, \xi \in \Omega \}$$

$\epsilon$ -konzentriert.

**Aufgabe 2.5.** a) Zeige: Im  $L^2(\mathbb{R})$  ist durch die Menge der *Haar-Wavelets*

$$h_{j,k}(x) = \begin{cases} -2^{j/2} & , x \in [k2^{-j}, (2k+1)2^{-j-1}) \\ 2^{j/2} & , x \in [(2k+1)2^{-j-1}, (k+1)2^{-j}] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

zu  $j, k \in \mathbb{Z}$  ein Orthonormalsystem definiert.

b) Man skizziere zugehörige *building blocks* im Phasenraum  $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$ , auf welchen diese Basisfunktionen  $\epsilon$ -konzentriert sind.

c) Das angegebene Orthonormalsystem ist vollständig.

d) Man diskutiere, inwieweit das erhaltene System eine Zeit-Frequenz-Zerlegung im Sinne des letzten Abschnittes liefert.

## 2.3 Zeit-Frequenz-Darstellungen von Signalen

Von einer Zeit-Frequenz-Darstellung eines Signals  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  sprechen wir, wenn wir  $f$  eine Funktion  $\varsigma(f) : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi \rightarrow \mathbb{C}$  zuordnen, so daß zumindest in einem gewissen Mittelwertsinne  $\varsigma(f)(x, \xi)$  den Anteil der Frequenz  $\xi$  zum Zeitpunkt/Ort  $x$  darstellt. Die Unschärferelation verbietet diese Idee zu ernst zu nehmen, trotzdem existieren einige Darstellungen, die zumindest in groben Maßstäben sehr nahe an dem liegen was man von ihnen naiv erwartet.

Vorstellen kann man sich eine Zeit-Frequenz-Darstellung wie die in der Musik verwendete Notenschrift.

### 2.3.1 Die gefensterterte Fouriertransformation

Einen naiven Zugang zu Zeit-Frequenz-Darstellungen liefert die gefensterterte Fouriertransformation. Dazu nutzen wir eine Fensterfunktion  $g$  und schneiden aus dem Signal  $f$  mittels  $g$  ein Stück heraus, bevor wir Fouriertransformieren. Die Darstellung hängt dann natürlich von der gewählten Fensterfunktion  $g$  ab. Wir wählen  $g$  in der Regel so, daß  $g$  in einer Umgebung von  $x = 0$  konzentriert ist.

**Definition 2.3.1.** Sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann ist die *gefensterte Fouriertransformation*  $V_g f$  von  $f \in L^2(\mathbb{R})$  definiert durch

$$\mathcal{V}_g f(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y \xi} \overline{g(y-x)} f(y) dy = (f | M_\xi T_x g). \quad (2.3.1)$$

Elementare Eigenschaften der gefensterterten Fouriertransformation ergeben sich direkt aus denen der Fouriertransformation. Da sowohl  $f$  als auch  $g$  als quadratintegrierbar vorausgesetzt sind, ist das Produkt in  $L^1$ . Das Integral ist damit im Lebesgueschen Sinne definiert.

**Lemma 2.3.2 (Elementare Eigenschaften).** 1. Sei  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann ist die gefensterterte Fouriertransformation  $V_g : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^2) \cap C(\mathbb{R}^2)$  ein beschränkter linearer Operator,

$$\|\mathcal{V}_g f\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2. \quad (2.3.2)$$

2. Es gilt für alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_g f(x, \xi) &= (f | M_\xi T_x g) = (\hat{f} | T_\xi M_{-x} \hat{g}) = e^{-2\pi i x \xi} \mathcal{V}_{\hat{g}} \hat{f}(\xi, -x) \\ &= (T_{-x} M_{-\xi} f | g) = e^{-2\pi i x \xi} \overline{\mathcal{V}_g f(-x, -\xi)} \\ &= (\hat{f} | T_\xi M_{-x} \hat{g}) = (M_x T_{-\xi} \hat{f} | \hat{g}) = \overline{\mathcal{V}_{\hat{f}} \hat{g}(-\xi, x)} \end{aligned}$$

wobei  $\hat{f} = \mathcal{F}^- f$  und  $\hat{g} = \mathcal{F}^- g$ .

3. Für alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  gilt

$$\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} \mathcal{V}_g f(x, \xi) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \mathcal{V}_g f(x, \xi) = 0. \quad (2.3.3)$$

4. Sei  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann gilt für alle  $y, \eta \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{V}_g f(x-y, \xi-\eta) = (f | M_{\xi-\eta} T_{x-y} g) = e^{2\pi i y \xi} \mathcal{V}_g [T_y M_\eta f](x, \xi). \quad (2.3.4)$$

*Beweis.* Vgl. Übung. □

Von besonderer Bedeutung ist folgender Satz. Er entspricht dem Satz von Plancherel für die gefensterterte Fouriertransformation.

**Satz 2.3.3 (Moyalsche Gleichung).** Seien  $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$(\mathcal{V}_{g_1} f_1 | \mathcal{V}_{g_2} f_2)_{L^2(\mathbb{R}^2)} = (f_1 | f_2) \overline{(g_1 | g_2)}. \quad (2.3.5)$$

Insbesondere ist  $\mathcal{V}_{g_i} f_i \in L^2(\mathbb{R}^2)$  und

$$\|\mathcal{V}_g f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = \|f\|_2 \|g\|_2. \quad (2.3.6)$$

*Beweis.* Sei vorerst  $f_i, g_i \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Dann gilt mit dem Satz von Plancherel

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{V}_{g_1} f_1 | \mathcal{V}_{g_2} f_2)_{L^2(\mathbb{R}^2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_{g_1} f_1(x, \xi) \overline{\mathcal{V}_{g_2} f_2(x, \xi)} dx d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y \xi} \overline{g_1(y-x)} f_1(y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i z \xi} g_2(z-x) f_2(z) dz dx d\xi \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g_1(y-x)} f_1(y) \int_{-\infty}^{\infty} g_2(y-x) \overline{f_2(y)} dy dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{g_1(x)} g_2(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \overline{f_2(y)} dy \\
 &= (f_1 | f_2) \overline{(g_1 | g_2)}.
 \end{aligned}$$

Stetige Fortsetzung liefert die Aussage für  $f_i, g_i \in L^2(\mathbb{R})$ . □

Insbesondere ergibt sich, daß für  $\|g\|_2 = 1$  die gefensterete Fouriertransformation  $\mathcal{V}_g : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{V}_g(L^2(\mathbb{R})) \subseteq L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  unitär ist,

$$(\mathcal{V}_g f_1 | \mathcal{V}_g f_2) = (f_1 | f_2). \quad (2.3.7)$$

Damit ist aber der adjungierte Operator  $\mathcal{V}_g^* : L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  linksinvers zu  $\mathcal{V}_g$ .

**Korollar 2.3.4 (Inversionsformel).** Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und  $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$f = \frac{1}{(g_2 | g_1)} \mathcal{V}_{g_2}^* \mathcal{V}_{g_1} f, \quad (2.3.8)$$

das heißt

$$f = \frac{1}{(g_2 | g_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_{g_1} f(x, \xi) M_\xi T_x g_2 dx d\xi \quad (2.3.9)$$

im Sinne eines Pettis-Integrals.

*Beweis.* Sei  $h \in L^2(\mathbb{R})$  beliebig. Dann gilt

$$\left( \frac{1}{(g_2 | g_1)} \mathcal{V}_{g_2}^* \mathcal{V}_{g_1} f, | h \right) = \frac{1}{(g_2 | g_1)} (\mathcal{V}_{g_2}^* \mathcal{V}_{g_1} f, | h) = \frac{1}{(g_2 | g_1)} (\mathcal{V}_{g_1} f, | \mathcal{V}_{g_2} h) = (f | h)$$

und die Behauptung folgt. □

### Bemerkungen.

1. Gilt  $\mathcal{V}_g f \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ , so gilt die Inversionsformel

$$f(y) = \frac{1}{(g_2 | g_1)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_{g_1} f(x, \xi) M_\xi T_x g_2(y) dx d\xi \quad (2.3.10)$$

als Lebesgue-Integral punktweise.

2. Im Allgemeinen kann man die Inversionsformel näherungsweise verstehen. So gilt mit

$$f_N(y) = \frac{1}{(g_2 | g_1)} \int_{-N}^N \int_{-N}^N \mathcal{V}_{g_1} f(x, \xi) M_\xi T_x g_2(y) dx d\xi \quad (2.3.11)$$

dann  $\lim_{N \rightarrow 0} \|f_N - f\|_2 = 0$ .

Die gefensterterte Fouriertransformation  $\mathcal{V}_g f(x, \xi)$  stellt eine (erste) Zeit-Frequenz-Darstellung eines Signals dar. Sie besitzt viele optimale Eigenschaften (weshalb sie sich zu einem Standard entwickelt hat), aber auch einige Nachteile, die die Arbeit mit ihr erschweren. Zu nennen wäre zuallererst die Abhängigkeit von der Wahl des Fensters  $g$ . Auflösungseigenschaften hängen sehr stark vom Fenster ab. Je nach Wahl des Fensters ‘verwischt’ die Zeit-Frequenz-Darstellung im Zeit- und/oder Frequenzbereich. So können bei Mehrkomponentensignalen durch Wahl unangepasster Fenster Komponenten bis zur Unkenntlichkeit verwischt werden.

Wir wollen zum Schluß noch eine eher triviale Folgerung aus den Abbildungseigenschaften der gefensterterten Fouriertransformation ziehen. Analog zum Unschärfepinzipp nach Donoho und Stark gilt

**Korollar 2.3.5 (Unschärferelation für  $\mathcal{V}_g$ ).** Sei  $\|f\| = \|g\| = 1$  und gelte für ein  $B \subseteq \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$  und  $\epsilon \in (0, 1)$

$$\iint_B |\mathcal{V}_g f(x, \xi)|^2 dx d\xi \geq 1 - \epsilon. \quad (2.3.12)$$

Dann gilt  $|B| \geq 1 - \epsilon$ .

*Beweis.* Da  $|\mathcal{V}_g f(x, \xi)| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 = 1$  gilt, folgt

$$1 - \epsilon \leq \iint_B |\mathcal{V}_g f(x, \xi)|^2 dx d\xi \leq |B|.$$

□

Ähnlich zur Definition der Pseudodifferentialoperatoren kann man auch mit Hilfe der gefensterterten Fouriertransformation Operatoren definieren. Dazu fixieren wir zwei Fensterfunktionen  $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$  und setzen für ein *Symbol*  $a(x, \xi) \in L^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$

$$A_a^{g_1, g_2} : L^2(\mathbb{R}) \ni f \mapsto A_a^{g_1, g_2} f = \mathcal{V}_{g_2}^* [a \mathcal{V}_{g_1} f], \quad (2.3.13)$$

wobei  $\mathcal{V}_{g_1} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  die gefensterterte Fouriertransformation mit dem *Analysefenster*  $g_1$  und  $\mathcal{V}_{g_2}^* : L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  die adjungierte Transformation zum *Synthesefenster*  $g_2$  darstellt. Die Inversionsformel der gefensterterten Fouriertransformation impliziert insbesondere für  $g_1 = g_2$  die Darstellung der identischen Abbildung  $A_1^{g, g} = I$ .

Die Zuordnung  $(a, g_1, g_2) \mapsto A_a^{g_1, g_2}$  ist multilinear und stetig, da

$$\|A_a^{g_1, g_2}\|_{2 \rightarrow 2} \leq \|a\|_\infty \|g_1\|_2 \|g_2\|_2 \quad (2.3.14)$$

gilt. Operatoren, die nach diesem Schema gebaut sind, werden in der Literatur als *Lokalisationsoperatoren* (*localisation operators*) bezeichnet. Wir werden noch sehen, das diese Operatoren eng mit Weyl-Operatoren verknüpft sind.

## Aufgaben

**Aufgabe 2.6.** Seien  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann bezeichnet man  $\text{Spec}_g f(x, \xi) = |\mathcal{V}_g f(x, \xi)|$  als *Spektrum* des Signals  $f$  zum Fenster  $g$ .

1. Man zeige, daß für  $\|g\|_2 = 1$  das Spektrogramm eine energietreue Darstellung ist, d.h. daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\text{Spec}_g f(x, \xi)|^2 dx d\xi \quad (2.3.15)$$

gilt, und darüberhinaus die *Kovarianzrelation*

$$\text{Spec}_g[M_\eta T_y f](x, \xi) = \text{Spec}_g f(x - y, \xi - \eta) \quad (2.3.16)$$

besitzt.

2. Sei  $g(x) = e^{-\pi x^2}$  der normierte Gauß-Kern. Zeige, daß dann die Fouriertransformation  $\mathcal{F}^\pm$  angewandt auf  $f$  einer Drehung des Spektrogramms um  $\pm 90^\circ$  entspricht, d.h.

$$\text{Spec}_g[\mathcal{F}^\pm f](x, \xi) = \text{Spec}_g f(\xi, \pm x) \quad (2.3.17)$$

gilt.

3. Man berechne (z.B. numerisch) das Spektrogramm folgender Signale

a)  $f(x) = \cos(x^2)e^{-x^2}$

b)  $f(x) = \text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$

und nutze dabei als Fenster i) den Gauß-Kern  $g(x) = e^{-\pi x^2}$  und ii) die charakteristische Funktion  $g(x) = \chi_{[-1/2, 1/2]}$  des Intervalls  $[-1/2, 1/2]$ .

**Aufgabe 2.7.** Sei  $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  und  $\Psi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Dann kann analog durch

$$\mathcal{V}_g \Psi(x, \xi) = \mathcal{F}^-[\bar{g}(\cdot - x)\Psi] \quad (2.3.18)$$

die gefensterterte Fouriertransformierte der temperierten Distribution  $\Psi$  definiert werden.

1. Man weise die Korrektheit der Definition nach und zeige, daß  $\mathcal{V}_g \Psi \in C^\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  gilt.
2. Berechne für
  - a) die Diracsche Deltadistribution  $\Psi = \delta_0$
  - b) den Dirac-Kamm  $\Psi = \Lambda_a, a > 0$

die gefensterterte Fouriertransformation  $\mathcal{V}_g \Psi$  für das Gauß-Fenster  $g(x) = e^{-\pi x^2}$ .

### 2.3.2 Die Wigner-Verteilung

Als Nachteil der gefensterter Fouriertransformation haben wir die Abhängigkeit von der gewählten Fensterfunktion genannt. Nun wollen wir eine Darstellung kennenlernen, die nur vom Signal abhängt. Ein erster Kandidat dafür wäre die quadratische (!) Darstellung

$$\mathcal{V}_f f(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y \xi} f(y) \overline{f(y-x)} dy \quad (2.3.19)$$

$$= e^{-\pi i x \xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y \xi} f(y+x/2) \overline{f(y-x/2)} dy = e^{-\pi i x \xi} \mathcal{A}f(x, \xi). \quad (2.3.20)$$

Die Darstellung  $\mathcal{A}f(x, \xi)$  wird als *ambiguity function* bezeichnet. Viele Eigenschaften der gefensterter Fouriertransformation übertragen sich auf diese Darstellung. So gilt  $\|\mathcal{A}f\|_{\infty} \leq \|\mathcal{A}f\|_2 = \|f\|_2^2$  und nutzt man die Fouriersche Inversionsformel so folgt

$$f(x) \overline{f(0)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}f(x, \xi) e^{\pi i x \xi} d\xi, \quad (2.3.21)$$

$\mathcal{A}f$  bestimmt also  $f$  nur bis auf einen Faktor  $c$  mit  $|c| = 1$ . Die ambiguity function tritt in Anwendungen für Radar-Erkennungs-Systeme auf.

Eine einfache Rechnung zeigt  $\mathcal{A}f(-x, -\xi) = \overline{\mathcal{A}f(x, \xi)}$ , die Funktion  $\mathcal{A}f(x, \xi)$  ist also im allgemeinen komplexwertig. Durch eine einfache Änderung in der Definition erhalten wir eine eng verwandte reellwertige Darstellung, die Wigner-Verteilung.

**Definition 2.3.6.** Zu  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  heißt

$$\mathcal{W}(f, g)(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y \xi} f(x+y/2) \overline{g(x-y/2)} dy \quad (2.3.22)$$

die *Kreuz-Wigner-Verteilung* und

$$\mathcal{W}f(x, \xi) = \mathcal{W}(f, f)(x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y \xi} f(x+y/2) \overline{f(x-y/2)} dy \quad (2.3.23)$$

die *Wigner-Verteilung*.

**Lemma 2.3.7 (Elementare Eigenschaften).** 1. Für alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  erfüllt die Kreuz-Wigner-Verteilung  $\mathcal{W}(f, g)(x, \xi) \in L^{\infty}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{\xi}) \cap C(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{\xi})$  und

$$\|\mathcal{W}(f, g)\|_{\infty} \leq 2\|f\|_2\|g\|_2. \quad (2.3.24)$$

Insbesondere gilt also  $\|\mathcal{W}f\|_{\infty} \leq 2\|f\|_2^2$ .

2. Für alle  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  gilt  $\mathcal{W}(f, g) = \overline{\mathcal{W}(g, f)}$ . Insbesondere ist  $\mathcal{W}f$  reellwertig.

3. Es gilt für  $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{W}[f_1 + f_2](x, \xi) = \mathcal{W}f_1(x, \xi) + \mathcal{W}f_2(x, \xi) + 2 \operatorname{Re} \mathcal{W}(f_1, f_2)(x, \xi) \quad (2.3.25)$$

4. Es gilt die Moyalsche Gleichung

$$(\mathcal{W}(f_1, g_1) \mid \mathcal{W}(f_2, g_2)) = (f_1 \mid f_2) \overline{(g_1 \mid g_2)} \quad (2.3.26)$$

für  $f_1, f_2, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ .

5. Für  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  ist  $\mathcal{W}(f, g) \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  und

$$\|\mathcal{W}f\|_2 = \|f\|_2^2. \quad (2.3.27)$$

6. Für  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  gilt

$$\mathcal{W}(f, g)(x, \xi) = \mathcal{W}(\hat{f}, \hat{g})(-\xi, x). \quad (2.3.28)$$

7. Für  $f, \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}f(x, \xi) dx = |\hat{f}(\xi)|^2 \quad \text{und} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}f(x, \xi) d\xi = |f(x)|^2. \quad (2.3.29)$$

8. Gilt  $\text{supp } f \subseteq [a, b]$ , so ist  $\mathcal{W}f(x, \xi) = 0$  für alle  $x \notin [a, b]$ . Entsprechend folgt aus  $\text{supp } \hat{f} \subseteq [\alpha, \beta]$ , auch  $\mathcal{W}f(x, \xi) = 0$  für alle  $\xi \notin [\alpha, \beta]$ .

*Beweis.* Wir skizzieren nur die wichtigsten Beweisideen, vieles funktioniert analog zur gefensterter Fouriertransformation. [1.] Die Abschätzung folgt direkt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, die 2 ergibt sich durch die Skalierungen. Stetigkeit in  $\xi$  ergibt sich aus Eigenschaften der Fouriertransformation, Stetigkeit in  $x$  muß man nachrechnen. [2.] trivial. [3.] trivial. [4.] folgt wie bei der gefensterter Fouriertransformation direkt aus dem Satz von Plancherel. [5.] folgt direkt aus 3. [6.] folgt aus dem Satz von Plancherel ähnlich wie für die gefensterter Fouriertransformation. [7.] Die Voraussetzung  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$  wird benötigt, damit für alle  $x \in \mathbb{R}$  fest gewählt  $\mathcal{W}f(x, \cdot) \in L^1$  gilt. Nun kann man die Inversionsformel der Fouriertransformation anwenden und erhält

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}f(x, \xi) d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i 0 \xi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y \xi} f(x + y/2) \overline{f(x - y/2)} dy d\xi \\ &= f(x + y/2) \overline{f(x - y/2)} \Big|_{y=0} = |f(x)|^2. \end{aligned}$$

[8.]  $\mathcal{W}f(x, \xi) \neq 0$  kann nur gelten, wenn  $x + y/2 \in \text{supp } f = [a, b]$  und  $x - y/2 \in \text{supp } f = [a, b]$  gelten. Da ein Intervall konvex ist, folgt  $x = ((x + y/2) + (x - y/2))/2 \in [a, b]$ . Also gilt  $\mathcal{W}(x, \xi) = 0$  für  $x \notin [a, b]$ . Die zweite Aussage folgt direkt mit Punkt 5.  $\square$

Die Wigner-Verteilung hängt eng mit der Weyl-Quantisierung von Operatoren zusammen.

**Lemma 2.3.8.** Seien  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $a \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ . Dann gilt

$$(L_a f \mid g) = (a \mid \mathcal{W}(g, f)). \quad (2.3.30)$$

Insbesondere ist  $\|L_a\|_{2 \rightarrow 2} \leq \|a\|_2$ .

*Beweis.* Mit dem Satz von Fubini gilt

$$\begin{aligned} (L_a f | g) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(x-y)\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) f(y) dy d\xi \overline{g(x)} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(z, \xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i t \xi} f(z-t/2) \overline{g(z+t/2)} dt dz d\xi \end{aligned}$$

wobei wir  $2z = x + y$  und  $t = x - y$  substituiert haben. Für die Normabschätzung nutzen wir schließlich die Moyalsche Gleichung für  $\mathcal{W}(f, g)$  in der Form  $\|\mathcal{W}(f, g)\|_2 = \|f\|_2 \|g\|_2$  und die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\|L_a f\|_2 = \sup_{\|g\|_2=1} |(L_a f | g)| \leq \sup_{\|g\|_2=1} \|a\|_2 \|\mathcal{W}(f, g)\|_2 = \|a\|_2 \|f\|_2. \quad (2.3.31)$$

□

Da für  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  für die Wigner-Verteilung  $\mathcal{W}(f, g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  gilt (Übung!), kann man die Darstellung aus Lemma 2.3.8 nutzen, um Symbolen  $a \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  Weyl-Operatoren  $L_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  zuzuordnen.

Auch die mit Hilfe der gefensterter Fouriertransformation definierten Lokalisationsoperatoren hängen eng mit der Wigner-Distribution zusammen. So gilt

**Lemma 2.3.9.** *Sei  $a \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  und  $g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann ist der Lokalisationsoperator  $A_a^{g_1, g_2}$  ein Weyl-Operator und es gilt*

$$A_a^{g_1, g_2} = L_a * \mathcal{W}(g_1, g_2). \quad (2.3.32)$$

Die Wigner-Verteilung wurde in der Quantenmechanik als Kandidat für eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung für Ort und Geschwindigkeit eingeführt. Als solche, sollte sie  $\mathcal{W}f \geq 0$  für alle  $x$  und  $\xi$  erfüllen. Äquivalent dazu: der Operator  $L_a$  ist positiv genau dann, wenn  $a(x, \xi) \geq 0$  gilt. Wie auf Grund der Unschärferelation schon zu vermuten, gilt eine solche Aussage wiederum **nicht**.<sup>4</sup> Stattdessen gilt

**Satz 2.3.10 (Hudson).** *Sei  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Es gilt  $\mathcal{W}f(x, \xi) > 0$  für alle  $x$  und  $\xi$  dann und nur dann, wenn*

$$f(x) = e^{-a\pi x^2 + 2\pi i b x + c} \quad (2.3.33)$$

mit  $a > 0, b, c \in \mathbb{C}$  gilt.

Für die Wigner-Verteilung gilt die folgende *Positivität im Mittel*. Die Verwendung des Gaußkerns ist entscheidend, für andere Mittelwerte gelten entsprechende Aussagen nicht immer.

**Satz 2.3.11.** *Seien  $a, b > 0$  und  $\sigma_{a,b}(x, \xi) = e^{-2\pi(x^2/a + \xi^2/b)}$ .*

1. *Ist  $ab = 1$ , so gilt  $\mathcal{W}f * \sigma_{a,b} \geq 0$  für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$ .*
2. *Ist  $ab > 1$ , so gilt  $\mathcal{W}f * \sigma_{a,b} > 0$  für alle  $f \in L^2(\mathbb{R}) \setminus 0$ .*

<sup>4</sup>In dieser Aussage haben einzelne Punkte  $(x, \xi)$  einen Sinn, das ist mehr als man nach der Unschärferelation erwarten kann.

3. Ist  $ab < 1$ , so existiert ein  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und  $(x, \xi) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$ , so daß  $\mathcal{W}f * \sigma_{a,b}(x, \xi) < 0$ .

*Beweis.* Sei  $\phi_a(x) = e^{-\pi x^2/a}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{W}\phi_a(x, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y \xi} e^{-\pi(x+y/2)^2/a - \pi(x-y/2)^2/a} dy \\ &= e^{-2\pi x^2/a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x \xi} e^{-\pi y^2/(2a)} dy = \sqrt{2a} \phi_{\frac{a}{2}}(x) \phi_{\frac{1}{2a}}(\xi). \end{aligned}$$

Gilt nun im ersten Fall  $ab = 1$ , d.h.  $b = 1/a$ , so kann man  $\sigma_{a,b}(x, \xi)$  als Wigner-Verteilung

$$\sigma_{a,1/a}(x, \xi) = \sqrt{2a} \mathcal{W}\phi_a(x, \xi) \tag{2.3.34}$$

schreiben. Mit der Kovarianz und der Moyal-Identität der Wigner-Verteilung folgt damit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}f * \sigma_{a,1/a}(x, \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}f(x-t, \xi-\eta) \sigma_{a,1/a}(t, \eta) dt d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}\tilde{f}(t-x, \eta-\xi) \sigma_{a,1/a}(t, \eta) dt d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{W}(M_\xi T_x \tilde{f})(t, \eta) \overline{\mathcal{W}\phi_a(t, \eta)} dt d\eta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2a}} |(M_\xi T_x \tilde{f} | \phi_a)|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

wobei wir  $\tilde{f}(x) = f(-x)$  gesetzt haben.

Für den Fall  $ab > 1$  nutzen wir

$$\phi_a * \phi_b = \sqrt{ab/(a+b)} \phi_{a+b} \tag{2.3.35}$$

(Übung!) um Konstanten  $0 < c < a$  und  $0 < d < b$  mit  $cd = 1$  und  $\sigma_{a,b} = \sigma_{c,d} * \sigma_{a-c,b-d}$  zu finden. Dann folgt  $\mathcal{W}f * \sigma_{a,b} = (\mathcal{W}f * \sigma_{c,d}) * \sigma_{a-c,b-d}$  und die Faltung einer nichtnegativen Funktion mit einer positiven Funktion ist positiv.

Für  $ab < 1$  geben wir noch ein Gegenbeispiel an. Die Hermite-Funktion  $f(x) = xe^{-\pi x^2}$  erfüllt  $\mathcal{W}f * \sigma_{a,b}(0, 0) < 0$ . □

## Aufgaben

**Aufgabe 2.8.** Man beweise die Kovarianzrelation  $\mathcal{W}(T_y M_\eta f)(x, \xi) = \mathcal{W}f(x-y, \xi-\eta)$ .

**Aufgabe 2.9.** Man zeige für die Kreuz-Wignerverteilung  $\mathcal{W}(f, g)$  zweier Funktionen die *Moyalsche Gleichung*

$$(\mathcal{W}(f_1, g_1) | \mathcal{W}(f_2, g_2)) = (f_1 | f_2) \overline{(g_1 | g_2)} \tag{2.3.36}$$

und damit  $\mathcal{W}(f, g) \in L^2(\mathbb{R}^2)$  für  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  erfüllt.

**Aufgabe 2.10.** Man berechne die Wignerverteilung folgender Signale:

$$\text{a) } f(x) = \chi_{[-a/2, a/2]}(x) \qquad \text{b) } f(x) = e^{2\pi i x \xi_0 - \pi(x-x_0)^2/c}$$

**Aufgabe 2.11.** Für eine Funktion  $f \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  definiert man die *symplektische Fouriertransformation*  $\mathcal{F}^\sigma$  durch

$$\mathcal{F}^\sigma[f](x, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(\xi y - x \eta)} f(y, \eta) dy d\eta. \quad (2.3.37)$$

Die symplektische Fouriertransformation besitzt viele Eigenschaften der Fouriertransformation.

a) Zeige

$$\mathcal{F}^\sigma : L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi) \rightarrow C_\infty(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi) \quad (2.3.38)$$

mit  $\|\mathcal{F}^\sigma\|_{1 \rightarrow \infty} \leq 1$  und

$$\mathcal{F}^\sigma : L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi) \quad (2.3.39)$$

unitär.

(Hinweis: Für letzteres nutze man, daß  $L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  die dichte Teilmenge  $L^2(\mathbb{R}_x) \otimes L^2(\mathbb{R}_\xi)$  besitzt und  $\mathcal{F}^\sigma = \mathcal{U} \circ (\mathcal{F}^- \otimes \mathcal{F}^+)$  mit  $\mathcal{U}f(x, \xi) = f(\xi, x)$  gilt.)

b) Es gilt  $\mathcal{F}^\sigma \circ \mathcal{F}^\sigma = I$  auf  $L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ .

c) Man zeige folgende Relationen zwischen den in der Vorlesung angegebenen Zeit-Frequenz-Darstellungen

$$\text{i) } \mathcal{F}^\sigma \mathcal{V}_g f = \mathcal{R}(f, g) = f(x) \overline{\hat{g}(\xi)} e^{-2\pi i x \xi} \text{ mit der Rihaczek-Verteilung } \mathcal{R}(f, g)$$

$$\text{ii) } \mathcal{F}^\sigma \mathcal{W}(f, g) = \mathcal{A}(f, g) \text{ mit der cross ambiguity function } \mathcal{A}(f, g)$$

d) Definiert man für  $(x_0, \xi_0) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$  den *time-frequency shift*

$$\pi_{(x_0, \xi_0)} f(x, \xi) = f(x - x_0, \xi - \xi_0), \quad (2.3.40)$$

so gilt

$$\mathcal{F}^\sigma \pi_{(x_0, \xi_0)} f(x, \xi) = e^{-2\pi i(\xi x_0 - x \xi_0)} \mathcal{F}^\sigma f(x, \xi). \quad (2.3.41)$$

**Aufgabe 2.12.** Für alle  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  gilt die *Poissonsche Summationsformel*

$$\sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \pi_{(ma, nb)} f(x, \xi) = \frac{1}{ab} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \pi_{(ma^{-1}, nb^{-1})} \mathcal{F}^\sigma f(x, \xi) \quad (2.3.42)$$

im Sinne punktweise gleichmäßiger Konvergenz.

Das Resultat setzt sich stetig auf alle  $f \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi) \cap \mathcal{F}^\sigma L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  fort.

**Aufgabe 2.13.** Eine *bilineare Zeit-Frequenz-Darstellung* der *Cohen-Klasse*  $\mathcal{C}_E$  ist ein bilinearer Operator  $C : L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  mit den Eigenschaften

1.  $C(f_1 + \lambda f_2, g) = C(f_1, g) + \lambda C(f_2, g)$  für  $f_1, f_2, g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,
2.  $C(f, g_1 + \lambda g_2) = C(f, g_1) + \bar{\lambda} C(f, g_2)$  für  $f, g_1, g_2 \in L^2(\mathbb{R})$  und  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,
3.  $|C(f, g)(0, 0)| \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$  (schwache Beschränktheit),

4.  $C(M_{\xi_0}T_{x_0}f, M_{\xi_0}T_{x_0}g) = \pi_{(x_0, \xi_0)}C(f, g) = C(T_{x_0}M_{\xi_0}f, T_{x_0}M_{\xi_0}g)$  (Kovarianzrelation).

a) Zeige, daß  $\mathcal{W}$  und  $\mathcal{R}$  zur Cohen-Klasse  $\mathcal{C}_E$  gehören.

b) Man zeige, daß für jede Darstellung aus der Cohen-Klasse  $\mathcal{C}_E$  eine Distribution  $\Psi_C \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  mit

$$C(f, f) = \Psi_C * \mathcal{W}f$$

existiert.

# 3 Gabor-Frames

## 3.1 Rieszbasen und Frames in Hilberträumen

Wir beginnen mit einigen abstrakten Betrachtungen. Sei im folgenden  $\mathbb{H}$  ein separabler Hilbertraum mit Skalarprodukt  $(\cdot|\cdot)$ . Bekannt ist aus der Funktionalanalysis, daß  $\mathbb{H}$  dann eine *Orthonormalbasis*  $e_j, j \in \mathbb{Z}$ , besitzt. Das heißt, es gelten

$$\text{span}\{e_j | j \in \mathbb{Z}\} \quad \text{ist dicht in } \mathbb{H} \quad (3.1.1)$$

zusammen mit

$$(e_k | e_\ell) = \delta_{k,\ell} = \begin{cases} 1, & k = \ell, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.1.2)$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt für alle  $f \in \mathbb{H}$

$$f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (f | e_j) e_j \quad (3.1.3)$$

als in  $\mathbb{H}$  unbedingt konvergente Reihe zusammen mit der Parsevalschen Gleichung

$$\|f\|^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |(f | e_j)|^2. \quad (3.1.4)$$

Einige Beispiele von Orthonormalbasen sind uns bis jetzt begegnet.

**Beispiel 3.1.1.** Im  $L^2(-a/2, a/2)$  ist durch die trigonometrische Basis

$$\frac{1}{\sqrt{a}} e^{2\pi i a^{-1} k x}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.1.5)$$

eine Orthonormalbasis gegeben. Darstellung von Elementen des  $L^2(-a/2, a/2)$  in dieser Basis sind gerade die Fourierreihen.

**Beispiel 3.1.2.** Im  $L^2(\mathbb{R})$  ist durch die normierten Hermite-Funktionen

$$\tilde{\phi}_k(x) = \frac{2^{1/4} \pi^{k/2}}{\sqrt{k!}} (X - iD)^k e^{-\pi x^2}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.1.6)$$

eine Orthonormalbasis gegeben.

**Beispiel 3.1.3.** Die Folge der Haar-Wavelets

$$h_{j,k}(x) = \begin{cases} -2^{j/2} & , x \in [k2^{-j}, (2k+1)2^{-j-1}) \\ 2^{j/2} & , x \in [(2k+1)2^{-j-1}, (k+1)2^{-j}] \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases} \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (3.1.7)$$

bildet eine Orthonormalbasis des  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Beispiel 3.1.4.** Sei  $g = a^{-1/2}\chi_{[-a/2, a/2]}(x)$  die normierte charakteristische Funktion des Intervalls  $[-a/2, a/2]$ . Dann bildet die Menge der Translationen und Modulationen

$$g_{m,n}(x) = M_{na^{-1}}T_{ma}g(x) = \begin{cases} a^{-1/2}e^{2\pi i n a^{-1}x}, & x \in [ma - a/2, ma + a/2], \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.1.8)$$

eine Orthonormalbasis des  $L^2(\mathbb{R})$ . Die  $g_{0,n}$  bilden eine Orthonormalbasis des  $L^2[-a/2, a/2]$ .

Viele Probleme lassen sich dadurch lösen (oder zumindest stark vereinfachen), wenn man sie bezüglich einer passenden Basis aufschreibt. Die Konstruktion derartiger angepaßter Basen ist oft aufwendig bzw. führt zu unnötig komplizierten Basiselementen. Wir wollen untersuchen, inwieweit man zur Beschreibung mit Systemen auskommt, die aus Translationen und Modulationen einer Funktion bestehen. Dazu müssen allerdings den engen Rahmen von Orthonormalbasen verlassen.

Rieszbasen und Frames sind Verallgemeinerungen von Orthonormalbasen, bei denen einige der obigen Forderungen aufgeweicht werden.

**Definition 3.1.5.** Sei  $e_j, j \in \mathbb{Z}$  eine Folge von Elementen aus  $\mathbb{H}$ .

1. Die Folge bildet eine *Besselfolge* in  $\mathbb{H}$ , falls der *Analyse-Operator*  $\mathcal{T} : f \mapsto (f | e_j)$  eine beschränkte Abbildung  $\mathbb{H} \rightarrow \ell^2$  ist, d.h. falls es eine Konstante  $C$  mit

$$\sum_j |(f | e_j)|^2 \leq C^2 \|f\|^2 \quad (3.1.9)$$

gibt.

2. Eine Besselfolge heißt ein *Frame* für  $\mathbb{H}$ , falls der Analyse-Operator  $\mathcal{T}$  stetig linksinvertierbar ist, d.h. falls eine Konstante  $c$  mit

$$c^2 \|f\|^2 \leq \sum_j |(f | e_j)|^2 \quad (3.1.10)$$

existiert (und damit  $T$  den Raum  $\mathbb{H}$  bijektiv auf  $\mathcal{T}(\mathbb{H}) \subseteq \ell^2$  abbildet).

Die optimalen Konstanten  $c$  und  $C$  heißen *Frame-Konstanten*.

3. Ein Frame heißt *Rieszbasis* von  $\mathbb{H}$ , falls  $\mathcal{T} : \mathbb{H} \rightarrow \ell^2$  bijektiv (und damit stetig invertierbar)<sup>1</sup> ist.

Weiß man, daß eine Folge  $e_j$  ein Frame bildet, so kann man einen linksinversen Operator zu  $\mathcal{T}$  konstruieren. Dazu betrachten wir vorerst  $\mathcal{T}$  genauer. Im Raum  $\ell^2$  ist durch

$$((a_j) | (b_j)) = \sum_j a_j \bar{b}_j \quad (3.1.11)$$

ein Skalarprodukt definiert, welches  $\ell^2$  zu einem Hilbertraum macht. Damit kann man zu  $\mathcal{T}$  den adjungierten Operator betrachten. Es gilt für jede *endliche* Folge  $a_j$

$$(\mathcal{T}f | (a_j)) = \sum_j (f | e_j) \bar{a}_j = \sum_j (f | a_j e_j) = (f | \sum_j a_j e_j) \quad (3.1.12)$$

<sup>1</sup>folgt aus dem Satz von Banach über den inversen Operator

und damit

$$\mathcal{T}^*(a_j) = \sum_j a_j e_j. \quad (3.1.13)$$

Da  $\mathbb{H}$  und  $\ell^2$  Hilberträume sind, folgt  $\mathcal{T}^* : \ell^2 \rightarrow \mathbb{H}$ . Damit konvergiert für jede Folge  $(a_j) \in \ell^2$  die Reihe (3.1.13) in  $\mathbb{H}$ . Der Operator  $\mathcal{T}^*$  wird als *Synthese-Operator* bezeichnet.

**Lemma 3.1.6.** *Sei  $e_j$  Besselfolge. Dann ist der zugeordnete Syntheseoperator  $\mathcal{T}^* : \ell^2 \rightarrow \mathbb{H}$  beschränkt und (3.1.13) ist unbedingt norm-konvergent, d.h. für jede Permutation  $\pi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  der Indizes gilt*

$$\sum_j a_j e_j = \sum_j a_{\pi(j)} e_{\pi(j)}. \quad (3.1.14)$$

*Beweis.* vgl. Gröchenig, Cor. 5.1.2 und Kap. 5.3. □

**Satz 3.1.7.** *1. Ist  $e_j$  ein Frame, so ist der Syntheseoperator surjektiv und der Frame-Operator  $S = \mathcal{T}^* \mathcal{T}$  invertierbar.*

*2. Sei  $e_j$  ein Frame. Dann bildet die Folge  $e_j^* = S^{-1} e_j$  ein Frame, das zu  $e_j$  kanonische duale Frame.*

*3. Sei  $e_j$  Frame und  $e_j^*$  das kanonische duale Frame. Dann gilt für alle  $f \in \mathbb{H}$*

$$f = \sum_j (f | e_j) e_j^* = \sum_j (f | e_j^*) e_j \quad (3.1.15)$$

*als unbedingt konvergente Reihen in  $\mathbb{H}$ .*

*Beweis.* [1.] Der Frame-Operator  $S = \mathcal{T}^* \mathcal{T}$  ist selbstadjungiert und es gilt

$$(Sf | f) = (\mathcal{T}^* \mathcal{T} f | f) = \|\mathcal{T} f\|^2 \geq c^2 \|f\|^2$$

für alle  $f \in \mathbb{H}$ . Damit ist  $S$  invertierbar,  $\mathcal{T}^*$  insbesondere surjektiv. [2.] Da  $S$  selbstadjungiert ist, ist auch  $S^{-1}$  selbstadjungiert und es gilt

$$\sum_j |(f | e_j^*)|^2 = \sum_j |(f | S^{-1} e_j)|^2 = \sum_j |(S^{-1} f | e_j)|^2$$

und mit  $\|f\| = \|SS^{-1}f\| \leq \|S\| \|S^{-1}f\|$  die Abschätzung

$$c^2 \|S\|^{-2} \|f\|^2 \leq \sum_j |(f | e_j^*)|^2 \leq C^2 \|S^{-1}\|^2 \|f\|^2.$$

[3.] Es gilt

$$\begin{aligned} f &= S^{-1} S f = S^{-1} \sum_j (f | e_j) e_j = \sum_j (f | e_j) S^{-1} e_j = \sum_j (f | e_j) e_j^* \\ &= S S^{-1} f = \sum_j (S^{-1} f | e_j) e_j = \sum_j (f | e_j^*) e_j \end{aligned}$$

und beide Reihen konvergieren unbedingt in  $\mathbb{H}$ . □

Ist  $e_j$  eine Rieszbasis, so sind  $\mathbb{H}$  und  $\ell^2$  isomorph und  $T : \mathbb{H} \rightarrow \ell^2$  ist eine Bijektion. Insbesondere sind dann die Koeffizienten in der Darstellung

$$f = \sum_j a_j e_j, \quad (a_j) \in \ell^2 \quad (3.1.16)$$

eindeutig bestimmt. Für ein Frame ist das im Allgemeinen nicht der Fall, vielmehr sind die mit dem kanonisch dualen Frame berechneten Koeffizienten optimal in folgendem Sinne:

**Satz 3.1.8.** *Sei  $e_j$  ein Frame für  $\mathbb{H}$  und gelte  $f = \sum_j a_j e_j$  für eine Folge  $(a_j) \in \ell^2$ . Dann gilt*

$$\sum_j |a_j|^2 \geq \sum_j |(f | e_j^*)|^2 \quad (3.1.17)$$

mit dem kanonischen dualen Frame  $e_j^*$ . Gleichheit gilt genau dann, wenn  $a_j = (f | e_j^*)$ .

*Beweis.* Setzt man  $c_j = (f | e_j^*)$ , so gilt  $f = \sum_j c_j e_j$  und damit

$$\begin{aligned} (f | S^{-1}f) &= \sum_j c_j (e_j | S^{-1}f) = \sum_j c_j \bar{c}_j = \|(c_j)\|^2 \\ &= \sum_j a_j (e_j | S^{-1}f) = \sum_j a_j \bar{c}_j = ((a_j) | (c_j)). \end{aligned}$$

Mit der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt aber nun

$$\|(c_j)\|^2 = ((a_j) | (c_j)) \leq \|(a_j)\| \|(c_j)\|$$

mit Gleichheit genau dann, wenn  $(a_j) = \lambda(c_j)$  für ein  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Offenbar muß  $\lambda = 1$  sein.  $\square$

## Aufgaben

**Aufgabe 3.1.** Man weise nach, daß Beispiel 3.1.4 wirklich eine Orthogonalbasis des  $L^2(\mathbb{R})$  liefert.

**Aufgabe 3.2.** Man zeige:

- Jede Orthogonalbasis ist eine Rieszbasis und jede Rieszbasis die mit ihrer dualen Basis übereinstimmt ist Orthogonalbasis.
- Die Vereinigung einer Orthogonalbasis und einer endlichen (abzählbaren) Menge von Elementen von  $\mathbb{H}$  ist ein Frame.
- Aus jedem Frame  $e_k$  läßt sich durch  $\tilde{e}_k = S^{-1/2}e_k$  ein Frame konstruieren, welches mit seinem kanonisch dualen Frame übereinstimmt.

**Aufgabe 3.3.** Stimmen die Frame-Konstanten überein,  $c = C$  in (3.1.9) und (3.1.10), so ist der Frame-Operator  $S$  die Identität. Man nennt ein solches Frame straff (engl. *tight frame*.)

**Aufgabe 3.4.** Man nennt ein Frame *exakt*, falls beim Entfernen eines Elementes die Frame-Eigenschaft verloren geht. Zeige:

- a) Jedes exakte Frame ist Rieszbasis.
- b) Jedes exakte Frame welches zusätzlich straff ist, ist eine Orthonormalbasis.

**Aufgabe 3.5.** Man kann auch Frames in Banach-Räumen konstruieren. Dazu existieren zwei (äquivalente) Zugänge. Sei dazu  $X$  ein Banachraum.

1. Ein Frame in  $X$  ist eine Folge  $e_k^*$  aus dem Dualraum  $X^*$ , so daß für alle  $x \in X$  die Ungleichungskette

$$c\|x\|_X \leq \sum_k |\langle e_k^*, x \rangle|^2 \leq C\|x\|_X$$

gilt.

2. Ein Frame in  $X$  ist ein linksinvertierbarer beschränkter Operator  $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(X, \ell^2)$ .

Man zeige die Äquivalenz beider Definitionen.

## 3.2 Gabor-Systeme und die Segal-Algebra $S_0(\mathbb{R})$

Wir wollen Frames mit einer besonderen Struktur für den Raum  $L^2(\mathbb{R})$  konstruieren. Sei dazu  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und für Parameter  $a, b > 0$

$$g_{m,n} = M_{nb}T_{ma}g, \quad m, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.2.1}$$

Die Menge der Funktionen  $\mathcal{G}(g, a, b) = \{g_{m,n} \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$  wird als *Gabor-System* zum Fenster  $g$  bezeichnet.<sup>2</sup> Die Frage, der wir nachgehen wollen, ist, ob und unter welchen Bedingungen  $\mathcal{G}(g, a, b)$  eine Bessel-Folge bzw. ein Frame von  $L^2(\mathbb{R})$  darstellt. Die Frage hängt eng mit der gefensternten Fouriertransformation zusammen. Betrachtet man den zugeordneten Analyse-Operator

$$\mathcal{T}_g : f \mapsto (f \mid g_{m,n}) = (f \mid M_{nb}T_{ma}g) = \mathcal{V}_g f(ma, nb), \tag{3.2.2}$$

so selektiert er gerade die Werte von  $\mathcal{V}_g f$  auf dem Gitter  $\Lambda_{a,b} = a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$ .

Wir wissen zwar, daß  $\mathcal{V}_g f \in L^2(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  gilt, daraus folgt aber noch nicht, daß auch die Einschränkung  $\mathcal{V}_g f|_{\Lambda_{a,b}}$  in  $\ell^2(\Lambda_{a,b})$  liegt. Dazu muß die Fensterfunktion  $g$  Bedingungen erfüllen. Wir setzen wieder  $\phi_0 = e^{-\pi x^2}$  und definieren mit Hilfe der gefensternten Fouriertransformation einen geeignete Klasse schöner Fensterfunktionen.

**Definition 3.2.1.** Die *Segal-Algebra*  $S_0(\mathbb{R})$  ist definiert durch

$$S_0(\mathbb{R}) = \{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \mathcal{V}_{\phi_0} f \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi) \} \tag{3.2.3}$$

versehen mit der Norm  $\|f\|_{S_0} = \|\mathcal{V}_{\phi_0} f\|_1$ .

<sup>2</sup>Oft nutzt man  $g_{m,n} = T_{ma}M_{nb}g$ . Der Unterschied der Definitionen besteht allerdings nur im Faktor  $e^{-2\pi i manb}$ .

Die Segal-Algebra  $S_0(\mathbb{R})$  ist gerade die Menge der Funktionen, für welche die Inversionsformel der gefensterter Fouriertransformation

$$f(y) = \sqrt{2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_{\phi_0} f(x, \xi) M_{\xi} T_x \phi_0(y) dx d\xi \quad \forall f \in S_0(\mathbb{R}) \quad (3.2.4)$$

punktweise als (starkes) Lebesgue-Integral gilt.

**Proposition 3.2.2 (Eigenschaften der Segal-Algebra  $S_0(\mathbb{R})$ ).** 1.  $S_0(\mathbb{R})$  ist ein Banachraum,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \hookrightarrow S_0(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$  sind stetige Einbettungen.

2. Die Fouriertransformation  $\mathcal{F}^{\pm} : S_0(\mathbb{R}) \rightarrow S_0(\mathbb{R})$  ist eine Isometrie,  $\|f\|_{S_0} = \|\hat{f}\|_{S_0}$ .
3. Der Raum  $S_0(\mathbb{R})$  ist zeit-frequenz-homogen, d.h. für alle  $x, \xi \in \mathbb{R}$  ist  $T_x M_{\xi} : S_0(\mathbb{R}) \rightarrow S_0(\mathbb{R})$  ein gleichmäßig in  $x, \xi$  beschränkter linearer Operator und die Zuordnung  $(x, \xi) \mapsto T_x M_{\xi} \in \mathcal{L}(S_0)$  ist stetig.
4. Ist  $B(\mathbb{R})$  ein zeit-frequenz-homogener Banachraum mit  $\phi_0 \in S(\mathbb{R})$ , so gilt  $S_0(\mathbb{R}) \hookrightarrow B(\mathbb{R})$  als stetige Einbettung. Insbesondere gilt  $S_0(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$  für alle  $p \in [1, \infty]$  und  $S_0(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_{\infty}(\mathbb{R})$ .<sup>3</sup>

5. Die Menge

$$\text{span}\{T_x M_{\xi} \phi_0 \mid (x, \xi) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{\xi}\} \quad (3.2.5)$$

ist dicht in  $S_0(\mathbb{R})$ .

*Beweis.* [1.] Aus der Moyalschen Gleichung der gefensterter Fouriertransformation ergibt sich zusammen mit der elementaren  $L^{\infty}$ -Abschätzung

$$\|f\|_2^2 \|\phi_0\|_2^2 = \|\mathcal{V}_{\phi_0} f\|_2^2 \leq \|\mathcal{V}_{\phi_0} f\|_1 \|\mathcal{V}_{\phi_0} f\|_{\infty} \leq \|\mathcal{V}_{\phi_0} f\|_1 \|\phi_0\|_2 \|f\|_2$$

und damit die Abschätzung

$$\|f\|_{S_0} = \|\mathcal{V}_{\phi_0} f\|_1 \geq \sqrt{2} \|f\|_2, \quad (3.2.6)$$

also  $S_0(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$ . Da für  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  auch  $\mathcal{V}_{\phi_0} f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{\xi})$  folgt (analog zu  $\mathcal{W}(f, \phi_0) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{\xi})$ ), ergibt sich die zweite Einbettung. Bleibt die Vollständigkeit. Konvergiert  $\sum_n f_n$  absolut in  $S_0(\mathbb{R})$ , so konvergiert  $\sum_n f_n$  in  $L^2(\mathbb{R})$  gegen ein  $f$ . Für dieses gilt  $|\mathcal{V}_{\phi_0} f| \leq \sum_n |\mathcal{V}_{\phi_0} f_n|$  punktweise (da  $\mathcal{V}_{\phi_0} : L^2 \rightarrow L^{\infty} \cap C$ ) und damit  $\|f\|_{S_0} \leq \sum_n \|f_n\|_{S_0}$ . [2.] Ergibt sich direkt aus  $\hat{\phi}_0 = \phi_0$  und  $|\mathcal{V}_{\phi_0} f(x, \xi)| = |\mathcal{V}_{\phi_0} \hat{f}(\xi, -x)|$ . [3.] Ergibt sich direkt aus der Stetigkeit im Mittel für  $L^1$ -Funktionen in Verbindung mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz. [4.] Ist  $B$  ein zeit-frequenz-homogener Banachraum, der  $\phi_0$  enthält, so kann die Darstellung von  $f \in S_0(\mathbb{R})$  als

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}_{\phi_0} f(x, \xi) M_{\xi} T_x \phi_0 dx d\xi$$

genutzt werden, um  $f$  in  $B$  einzubetten. Die Homogenität von  $B$  impliziert die Konvergenz als  $B$ -wertiges Bochner-Integral und damit

$$\|f\|_B \leq C \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{V}_{\phi_0} f(x, \xi)| dx d\xi \|\phi_0\|_B = C \|\phi_0\|_B \|f\|_{S_0}.$$

[5.] Folgt direkt aus Punkt 4, da der Abschluß der Menge in der  $S_0$ -Norm  $\phi_0$  enthält und offensichtlich zeit-frequenz-homogen ist.  $\square$

<sup>3</sup> $C_{\infty}(\mathbb{R}) = \{f \in L^{\infty}(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R}) \mid \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0\}$

**Beispiel 3.2.3.** Wir wollen ein paar Kriterien für Funktionen  $f$  angeben, um zu  $S_0(\mathbb{R})$  zu gehören. Zum Beispiel gilt:

1. Ist  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , so gilt  $f \in S_0(\mathbb{R})$ .
2. Ist  $f \in L^1(\mathbb{R})$  bandbeschränkt, d.h.  $\text{supp } \hat{f}$  ist kompakt, so gilt  $f \in S_0(\mathbb{R})$  (Übung!).
3. Gilt  $\langle x \rangle^s f(x) \in L^2(\mathbb{R}_x)$  und  $\langle \xi \rangle^s \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}_\xi)$  für ein  $s > \frac{3}{2}$ , so folgt  $f \in S_0(\mathbb{R})$ .<sup>4</sup>

Die Definition von  $S_0(\mathbb{R})$  ist von der Wahl der speziellen Fensterfunktion  $\phi_0$  unabhängig. Es gilt

**Lemma 3.2.4 (Feichtinger).** *Es sind äquivalent*

1.  $f \in S_0(\mathbb{R})$ .
2.  $\mathcal{V}_g f \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  für ein  $g \in S_0(\mathbb{R})$ .
3.  $\mathcal{V}_f f \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$ .
4.  $\mathcal{V}_g f \in L^1(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  für alle  $g \in S_0(\mathbb{R})$

*Beweisskizze.* Ersetzt man in der Definition von  $S_0(\mathbb{R})$  den Gauß-Kern  $\phi_0$  durch ein anderes  $g \in S_0(\mathbb{R})$ , so erhält man offenbar wiederum einen zeit-frequenz-homogenen Banachraum, die Äquivalenz der Normen in beiden Räumen folgt dann genau wie in Punkt 4 der letzten Proposition. Damit sind Punkte 2 und 4 äquivalent. Aus 4 folgt aber 3, aus 3 Aussage 2 und 1 ist ein Spezialfall von Aussage 2.  $\square$

Nun kommen wir zur Hauptaussage dieses Abschnitts. Wählt man die Fensterfunktion  $g$  aus der Segal-Algebra  $S_0(\mathbb{R})$ , so bildet die Gabor-Familie  $\mathcal{G}(g, a, b)$  für alle Gitterweiten  $a, b > 0$  eine Bessel-Folge.

**Satz 3.2.5.** *Sei  $g \in S_0(\mathbb{R})$ . Dann ist  $\mathcal{G}(g, a, b)$  für alle  $a, b > 0$  eine Bessel-Folge in  $L^2(\mathbb{R})$ , d.h. der Analyse-Operator  $\mathcal{T}_g : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2$  ist beschränkt. Weiterhin gilt  $\mathcal{T}_g : S_0(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^1$  und  $\mathcal{T}_g : S'_0(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^\infty$  als beschränkter linearer Operator.*

Der Beweis basiert auf zwei Hilfsaussagen, die auch weiterhin von entscheidender Bedeutung sein werden. Die erste besagt, daß für Funktionen aus der Segal-Algebra  $S_0(\mathbb{R})$  die gefenster- te Fouriertransformation nicht nur integrierbar ist sondern vielmehr zum Wiener-Amalgam-Raum<sup>5</sup>  $\mathcal{W}(L^\infty, \ell^1)(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  gehört.

**Lemma 3.2.6.** *Seien  $g_1, g_2 \in S_0(\mathbb{R})$ . Dann gilt für alle  $a, b > 0$*

$$\frac{1}{ab} \|\mathcal{V}_{g_1 g_2}\|_1 \leq \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \sup_{|x| \leq a/2} \sup_{|\xi| \leq b/2} |\mathcal{V}_{g_1 g_2}(x + ma, \xi + mb)| \leq C_{a,b} \|g_1\|_{S_0} \|g_2\|_{S_0}. \quad (3.2.7)$$

<sup>4</sup>Dabei bezeichnet  $\langle x \rangle = \sqrt{1 + x^2}$ . Anders ausgedrückt, der gewichtete Sobolevraum  $H^{s,s}(\mathbb{R}^n)$  ist für  $s > \frac{3}{2}n$  in  $S_0(\mathbb{R}^n)$  eingebettet.

<sup>5</sup>Eine Funktion gehört zum Wiener-Amalgam-Raum  $\mathcal{W}(X, Y)$ ,  $X$  Funktionenraum,  $Y$  Folgenraum, wenn sie sich *lokal* wie ein Element von  $X$  und *global* wie ein Element von  $Y$  verhält.

*Beweisskizze.* Die untere Abschätzung ist klar, es verbleibt die obere. Wir verfahren in zwei Schritten. Setzt man  $g_1 = \phi_0$ , so definiert die Reihe

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \sup_{|x| \leq a/2} \sup_{|\xi| \leq b/2} |\mathcal{V}_{g_1} g_2(x + ma, \xi + mb)|$$

zumindest für alle  $g_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  eine Norm in einem zeit-frequenz-homogenen Raum. Nach Proposition 3.2.2.4 ist  $S_0(\mathbb{R})$  in diesen eingebettet und die Abschätzung folgt. Gleiches gilt offenbar für  $g_2 = \phi_0$  und  $g_1 \in S_0(\mathbb{R})$ .

Fixiert man nun  $g_1 \in S_0(\mathbb{R})$ , so definiert die Reihe eine Norm von  $g_2$  in einem zeit-frequenz-homogenen Raum, der  $\phi_0$  enthält. Mit Proposition 3.2.2.4 folgt die Abschätzung

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \sup_{|x| \leq a/2} \sup_{|\xi| \leq b/2} |\mathcal{V}_{g_1} g_2(x + ma, \xi + mb)| \leq C_{a,b,g_1} \|g_2\|_{S_0}$$

und mit dem Satz über die gleichmäßige Beschränktheit die Behauptung.  $\square$

Die zweite Hilfsaussage ist im wesentlichen eine Version der Poissonschen Summationsformel für den Phasenraum.

**Lemma 3.2.7 (Fundamentale Identität der Gabor-Analysis).** *Seien  $g_1, g_2 \in S_0(\mathbb{R})$  und  $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ , dann gilt für alle  $a, b > 0$*

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_{g_1} f_1(ma, nb) \overline{\mathcal{V}_{g_2} f_2(ma, nb)} = \frac{1}{ab} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \mathcal{V}_{g_1} g_2(mb^{-1}, na^{-1}) \overline{\mathcal{V}_{f_1} f_2(mb^{-1}, na^{-1})}. \quad (3.2.8)$$

*Beweisskizze.* Wir nutzen die symplektische Fouriertransformation. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^\sigma[\mathcal{V}_{g_1} f_1 \overline{\mathcal{V}_{g_2} f_2}](-x, -\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(\xi y - x\eta)} \mathcal{V}_{g_1} f_1(y, \eta) \overline{\mathcal{V}_{g_2} f_2(y, \eta)} dy d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i(\xi y - x\eta)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i z \eta} \overline{g_1(z - y)} f_1(z) dz \\ &\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i z' \eta} g_2(z' - y) \overline{f_2(z')} dz' dy d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \xi y} \overline{g_1(z - y - x)} f_1(z - x) g_2(z - y) \overline{f_2(z)} dy dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i(z-y)\xi} \overline{g_1(z - y - x)} g_2(z - y) dy \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i z \xi} f_1(z - x) \overline{f_2(z)} dz \\ &= \mathcal{V}_{g_1} g_2 \overline{\mathcal{V}_{f_1} f_2}(x, \xi) \end{aligned}$$

unter Ausnutzung des Satzes von Plancherel. Mit der Poissonschen Summationsformel<sup>6</sup> (vgl. Aufgabe 2.12) folgt die Behauptung, die Anwendbarkeit derselben garantiert Lemma 3.2.6.  $\square$

<sup>6</sup>Falls  $h, \mathcal{F}^\sigma h \in \mathcal{W}(L^\infty, \ell^1)(\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi)$  gilt, folgt

$$\sum_{m,n} h(ma, nb) = \frac{1}{ab} \sum_{m,n} \mathcal{F}^\sigma[h](mb^{-1}, na^{-1}).$$

*Beweis von Satz 3.2.5.* Mit Lemma 3.2.7 folgt für  $f \in L^2(\mathbb{R})$  und  $g \in S_0(\mathbb{R})$

$$\sum_{m,n} |\mathcal{V}_g f(ma, nb)|^2 = \frac{1}{ab} \sum_{m,n} \mathcal{V}_g g(mb^{-1}, na^{-1}) \overline{\mathcal{V}_f f(mb^{-1}, na^{-1})} \leq \frac{C_{a,b}}{ab} \|g\|_{S_0}^2 \|f\|_2^2.$$

Die Aussage für  $f \in S_0(\mathbb{R})$  folgt direkt aus Lemma 3.2.6, die für  $S'_0(\mathbb{R})$  aus folgendem Dualitätsargument: Wir betrachten den Synthese-Operator  $\mathcal{T}_g^*$  angewandt auf  $\ell^1$ -Folgen und nutzen  $\|g_{m,n}\|_{S_0} = \|g\|_{S_0}$ ,

$$\mathcal{T}_g^*(a_{m,n}) = \sum_{m,n} a_{m,n} g_{m,n}, \quad \|\mathcal{T}_g^*(a_{m,n})\|_{S_0} \leq \|(a_{m,n})\|_{\ell^1} \|g\|_{S_0}.$$

Damit gilt  $\mathcal{T}_g^* : \ell^1 \rightarrow S_0(\mathbb{R})$ , also nach Adjungieren  $\mathcal{T}_g : S'_0(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^\infty$ .  $\square$

## Aufgaben

**Aufgabe 3.6.** Man zeige, daß

- a) jede Schwartz-Funktion zu  $S_0(\mathbb{R})$  gehört,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset S_0(\mathbb{R})$ ,
- b) aus  $f \in L^1(\mathbb{R})$  mit  $\text{supp } \hat{f} \in [-M, M]$  für ein  $M > 0$  schon  $f \in S_0(\mathbb{R})$  folgt.

Gehört die Funktion  $g(x) = \max(0, 1 - |x|)$  zu  $S_0(\mathbb{R})$  ?

**Aufgabe 3.7.** Zu jedem  $f \in S_0(\mathbb{R})$  existiert eine Folge  $(x_k, \xi_k) \in \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_\xi$  mit

$$f = \sum_k M_{\xi_k} T_{x_k} \phi_0 \tag{3.2.9}$$

als in  $S_0(\mathbb{R})$  konvergente Reihe. (*atomic decomposition* von  $S_0(\mathbb{R})$ )

**Aufgabe 3.8.** Für alle  $f \in S_0(\mathbb{R})$  gilt die Poissonsche Summationsformel

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x + ak) = \frac{1}{a} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(a^{-1}k) e^{2\pi i k a^{-1} k x} \tag{3.2.10}$$

als gleichmäßig konvergente Reihen.

## 3.3 Der Gabor-Frame-Operator

Ziel dieses Abschnittes ist es, den Operator  $S_{g,a,b} = \mathcal{T}_{g,a,b}^* \mathcal{T}_{g,a,b}$  für ein Gabor-System  $\mathcal{G}(g, a, b)$  zu untersuchen.

**Satz 3.3.1 (Janssensche Darstellung für  $S_g$ ).** Sei  $g \in S_0(\mathbb{R})$ . Dann gilt

$$S_{g,a,b} = \frac{1}{ab} \sum_{m,n} \mathcal{V}_g g(mb^{-1}, na^{-1}) M_{na^{-1}} T_{mb^{-1}} \tag{3.3.1}$$

in  $\mathcal{L}(B(\mathbb{R}))$  für jeden zeit-frequenz-homogenen Banachraum  $B(\mathbb{R})$  (insbesondere in  $\mathcal{L}(S_0(\mathbb{R}))$  und  $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ ).

*Beweis.* Seien  $f, h \in L^2(\mathbb{R})$ . Dann gilt mit Lemma 3.2.7

$$\begin{aligned} (S_{g,a,b}f | h) &= \left( \sum_{m,n} \mathcal{V}_g f(ma, nb) M_{nb} T_{ma} g \mid h \right) = \sum_{m,n} \mathcal{V}_g f(ma, nb) \overline{\mathcal{V}_g h(ma, nb)} \\ &= \frac{1}{ab} \sum_{m,n} \mathcal{V}_g g(mb^{-1}, na^{-1}) \overline{\mathcal{V}_f h(mb^{-1}, na^{-1})} \\ &= \left( \frac{1}{ab} \sum_{m,n} \mathcal{V}_g g(mb^{-1}, na^{-1}) M_{na^{-1}} T_{mb^{-1}} f \mid h \right) \end{aligned}$$

und die Darstellung gilt punktweise für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Da nach Lemma 3.2.6  $\mathcal{V}_g g \in \ell^1(\Lambda_{b^{-1}, a^{-1}})$  gilt, folgt Konvergenz in der Operatornorm in allen zeit-frequenz-homogenen Räumen.  $\square$

**Korollar 3.3.2.** *Sei  $g \in S_0(\mathbb{R})$ . Dann gilt*

$$\lim_{a,b \rightarrow 0} ab S_{g,a,b} = \|g\|_2^2 I \quad \text{in } \mathcal{L}(B(\mathbb{R})) \quad (3.3.2)$$

für jeden zeit-frequenz-homogenen Banachraum  $B(\mathbb{R})$ .

*Insbesondere existiert ein  $\epsilon > 0$ , so daß für  $a, b < \epsilon$  der Frame-Operator  $S_{g,a,b} : S_0(\mathbb{R}) \rightarrow S_0(\mathbb{R})$  und  $S_{g,a,b} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  invertierbar ist.*

*Beweis.* Sei  $B = S_0(\mathbb{R})$  oder  $B = L^2(\mathbb{R})$ . Mit der Janssenschen Darstellung für  $S_{g,a,b}$  ergibt sich

$$ab S_{g,a,b} - \|g\|_2^2 I = \sum_{(m,n) \neq (0,0)} \mathcal{V}_g g(mb^{-1}, na^{-1}) M_{na^{-1}} T_{mb^{-1}}$$

in  $\mathcal{L}(B)$  und damit

$$\|ab S_{g,a,b} - \|g\|_2^2 I\|_{B \rightarrow B} \leq \sum_{(m,n) \neq (0,0)} |\mathcal{V}_g g(mb^{-1}, na^{-1})|$$

und die rechte Seite strebt wegen Lemma 3.2.6 für  $a, b \rightarrow 0$  gegen Null.  $\square$

**Korollar 3.3.3.** *Die Zuordnung  $S_0(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}_+^2 \ni (g, a, b) \mapsto S_{g,a,b} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$  ist stetig.*

Im speziellen Fall, daß man als Fensterfunktion den Gauß-Kern  $\phi_0(x) = e^{-\pi x^2}$  wählt, kann man eine wesentlich genauere Aussage über die Invertierbarkeit des Gabor-Frame-Operators  $S_{\phi_0, a, b}$  treffen. Es gilt

**Satz 3.3.4 (Lyubarski, Seip-Wallsten).** *Das Gabor-System  $\mathcal{G}(\phi_0, a, b)$  ist ein Frame für  $L^2(\mathbb{R})$  genau dann, wenn  $ab < 1$ .*

## 3.4 Duale Gabor-Systeme

**Lemma 3.4.1.** *Sei  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Gabor-System und  $S_g$  der zugehörige Frame-Operator. Dann gilt*

$$S_g \circ T_a = T_a \circ S_g \quad \text{und} \quad S_g \circ M_b = M_b \circ S_g. \quad (3.4.1)$$

*Beweis.* Wir zeigen nur die erste der Aussagen. Es gilt

$$\begin{aligned} S_g T_a f &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (T_a f | g_{m,n}) g_{m,n} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (f | T_{-a} g_{m,n}) g_{m,n} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i n a b} (f | g_{m-1,n}) g_{m,n} \\ &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (f | g_{m,n}) e^{-2\pi i n a b} g_{m+1,n} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (f | g_{m,n}) T_a g_{m,n} = T_a S_g f \end{aligned}$$

wobei wir  $T_a M_b g = e^{-2\pi i a b} M_b T_a g$  genutzt haben. (Die zweite Aussage ist einfacher und verbleibt als Übung.)  $\square$

**Lemma 3.4.2.** *Sei  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Frame. Dann ist das kanonische duale Frame ein Gabor-System und durch  $\mathcal{G}(\gamma^\circ, a, b)$  mit  $\gamma^\circ = S_g^{-1} g$  gegeben.*

*Beweis.* Es gilt  $S_g^{-1} g_{m,n} = S_g^{-1} M_{nb} T_{ma} g = M_{nb} T_{ma} S_g^{-1} g = M_{nb} T_{ma} \gamma^\circ = \gamma_{m,n}^\circ$ .  $\square$

Es ergibt sich eine einfache Folgerung aus dem Inhalt von Abschnitt 3.1. Es gilt folgendes Darstellungsresultat:

**Satz 3.4.3.** *Seien  $g \in L^2(\mathbb{R})$  und  $a, b > 0$  so gewählt, daß  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Frame bildet. Dann gilt mit  $\gamma^\circ = S_g^{-1} g$  für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$*

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (f | g_{m,n}) \gamma_{m,n}^\circ = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (f | \gamma_{m,n}^\circ) g_{m,n} \quad (3.4.2)$$

als unbedingt konvergente Reihe.

Das Entscheidende an Frames ist, daß wir keine Eindeutigkeit der Koeffizientenfolge  $c_{m,n}$  in der Darstellung von  $f$  als unbedingt konvergente Reihe  $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} c_{m,n} g_{m,n}$  haben. Die Folge  $c_{m,n} = (f | \gamma_{m,n}^\circ)$ , die wir vermittels des kanonischen dualen Gabor-Systems  $\mathcal{G}(\gamma^\circ, a, b)$  konstruiert haben, ist dadurch gekennzeichnet, daß  $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |c_{m,n}|^2$  *minimal* ist.

Analog kann man zeigen, daß das kanonisch duale Gabor-Frame  $\mathcal{G}(\gamma^\circ, a, b)$  *minimal* in der Menge aller geeigneten dualen Gabor-Frames ist. Dafür definieren wir nach H.G. Feichtinger und G. Zimmermann

**Definition 3.4.4.** Zwei Fensterfunktionen  $g, \gamma \in S_0(\mathbb{R})$  heißen zueinander *schwach dual* bezüglich des Gitters  $\Lambda_{a,b} = a\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z}$ , falls für alle  $f, h \in L^2(\mathbb{R})$

$$(f | h) = \sum_{m,n} (f | g_{m,n}) (\gamma_{m,n} | h) \quad (3.4.3)$$

als absolut konvergente Reihe gilt.

Bildet  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Frame, so sind  $g$  und  $\gamma^\circ = S_g^{-1} g$  schwach dual.

**Proposition 3.4.5.** *Seien  $g, \gamma \in S_0(\mathbb{R})$ . Dann sind die zwei Gabor-Systeme  $\mathcal{G}(g, a, b)$  und  $\mathcal{G}(\gamma, a, b)$  zum Gitter  $\Lambda_{a,b}$  zueinander duale Frames, d.h. für alle  $f \in L^2(\mathbb{R})$  gilt*

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (f | g_{m,n}) \gamma_{m,n} = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} (f | \gamma_{m,n}) g_{m,n} \quad (3.4.4)$$

als unbedingt konvergente Reihe, genau dann, wenn  $g$  und  $\gamma$  zueinander schwach dual sind.

*Beweis.* Die Hinrichtung ist trivial. Es bleibt die Rückrichtung zu zeigen. Seien dazu  $g, \gamma \in S_0(\mathbb{R})$  schwach dual. Dann sind die Analyse-Operatoren bezüglich des Gitters  $\Lambda_{a,b}$  beschränkt,  $\mathcal{T}_g, \mathcal{T}_\gamma \in \mathcal{L}(L^2, \ell^2)$ , und damit  $S_{\gamma,g} = \mathcal{T}_\gamma^* \circ \mathcal{T}_g : L^2 \rightarrow L^2$  beschränkt. Wählt man nun  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , so impliziert die schwache Dualität  $(f | h) = (S_{g,\gamma} f | h)$  für alle  $h \in L^2(\mathbb{R})$  und damit  $S_{g,\gamma} f = f$ . Damit sind aber die Gabor-Systeme zueinander duale Frames.  $\square$

**Satz 3.4.6.** *Sei  $g \in S_0(\mathbb{R})$  und bilde  $\mathcal{G}(g, a, b)$  ein Frame.*

1. *Dann ist  $\mathcal{G}(g, 1/b, 1/a)$  Rieszbasis seiner abgeschlossenen linearen Hülle*

$$\mathcal{K}_g = \text{cl span } \mathcal{G}(g, 1/b, 1/a) \subseteq L^2(\mathbb{R}). \quad (3.4.5)$$

2. *Das kanonisch duale Fenster  $\gamma^\circ = S_g^{-1}g$  gehört zu diesem Unterraum,  $\gamma^\circ \in \mathcal{K}_g$ .*

3. *Für  $\gamma \in S_0(\mathbb{R})$  sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

a) *Die Fenster  $g$  und  $\gamma$  sind schwach dual bezüglich  $\Lambda_{a,b}$ .*

b) *Es gilt  $\gamma \in \gamma^\circ + \mathcal{K}_g^\perp$ .*

*Insbesondere ist  $\|\gamma^\circ\|_2 \leq \|\gamma\|_2$  für jedes duale Fenster  $\gamma$ .*

# Index

- Algebra der schwach wachsenden Funktionen, 18
- Analyse-Operator, 48
- Besselfolge, 48
- bilineare Zeit-Frequenz-Darstellung, 45
- cross ambiguity function, 45
- Differentialgleichungen, 14
- Dirac-Kamm, 22
- Diracsche Deltadistribution, 15
- duales Fenster, 57, 58
- Euler-Fouriersche Formeln, 23
- Faltung, 7
- Faltungsalgebra der schnell fallenden Distributionen, 19
- Faltungsgleichungen, 13
- Filter, 13
- Formel von Rodriguez, 14
- Fouriermultiplikatoren, 13
- Fourierreihen, 23, 24, 47
- Fouriersche Inversionsformel, 11, 17
- Fouriertransformation, 5, 6
- Frame, 48
  - exakt, 50
  - tight, 50
- Frame-Konstanten, 48
- Frame-Operator, 49
- Friedrichs-Glättung, 9
- Fundamentale Identität der Gabor-Analysis, 54
- Gabor-System, 51
- Gauß-Kern, 10, 14
- gefensterte Fouriertransformation, 37
- Höldersche Ungleichung, 6, 9
- Haar-Wavelets, 36, 47
- Hermite-Funktionen, 14, 35, 47
- Hermite-Polynom, 14
- Hilbert-Schmidt-Operator, 30
- Inversionsformel der gefensterten Fouriertransformation, 38
- Janssensche Darstellung des Gabor-Frame-Operators, 55
- kanonisch duales Fenster, 57
- kanonisches duales Frame, 49
- Kohn-Nirenberg-Quantisierung, 32, 35
- Kovarianzrelation, 40, 44
- Kreuz-Wigner-Verteilung, 41
- Kronecker-Symbol, 14
- $L^2$ -Skalarprodukt, 11
- Leibnizprodukt
  - zweier K.-N.-Symbole, 32
  - zweier W.-Symbole, 33
- Lokalisationsoperator, 43
- Lokalisationsoperatoren, 39
- $L^p$ -Räume, 5, 8
- Modulation, 6
- Moyal-Identität, 37, 42, 44
- Orthogonalitätsrelation, 14
- Orthonormalbasis, 47
- Parsevalsche Gleichung, 24, 35, 47
- periodische Distributionen, 21
- Poissonsche Summationsformel, 22, 24, 45, 54
- Positivität im Mittel, 43
- Pseudodifferentialoperatoren, 32

- reguläre Distribution, 15
- Riemann-Lebesgue-Lemma, 12
- Rieszbasis, 48
- Rihaczek-Verteilung, 45
  
- Satz von Plancherel, 12
- Schwartz-Raum, 10
- Segal-Algebra, 51
- Seminormen, 10, 12, 15
- Shannon-Nyquist-Sampling-Theorem, 25
- Signal
  - endlicher Energie, 27
  - Frequenzdarstellung, 5, 27
  - Zeitdarstellung, 5, 27
- sinus cardinalis, 18
- Spektrogramm, 40
- Stetigkeit im Mittel, 9
- Symbol
  - Kohn-Nirenberg-Symbol, 32
  - Weyl-Symbol, 33
- symplektische Fouriertransformation, 45
- Synthese-Operator, 49
  
- temperierte Distributionen, 15
- time-frequency-shift, 45
- Träger
  - einer Distribution, 20
  - einer Funktion, 11
- Translation, 6
- transponierter Operator, 16
  
- Unschärferelation, 28
  - abstrakte, 28
  - für  $\mathcal{V}_g$ , 39
  - Heisenbergsche, 29
  - nach Donoho und Stark, 31
  
- Varianz, 29
  
- Weyl-Quantisierung, 33, 42
- Wigner-Verteilung, 41
  
- Youngsche Ungleichung, 9
  
- Zeit-Frequenz-Darstellung, 36
  - ambiguity function, 41
  - Cohen-Klasse, 45
  - gefensterte Fouriertransformation, 37
  - Rihaczek-Verteilung, 45
  
- Wigner-Verteilung, 41
- zeit-frequenz-homogener Banachraum, 52
- Zeit-Frequenz-Zerlegung, 34
  - Gabor, 35
  - Littlewood-Paley, 34
  - Wavelet, 35