

Übung Vektor- und Tensoranalysis für Geophysiker

Serie 6

Differentialoperatoren der Vektoranalysis und Integralsätze

1. Man verifiziere (in kartesischen Koordinaten)

- (a) $\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = \Delta \phi$
- (b) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \phi = 0$
- (c) $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = 0$

für jedes C^2 -Skalarfeld ϕ und jedes C^2 -Vektorfeld \vec{v} .

2. Man vereinfache / berechne

- (a) $\operatorname{rot} \vec{r}$
- (b) $\operatorname{div} \vec{r}$
- (c) $(\vec{u} \cdot \operatorname{grad}) \vec{r}$
- (d) $\operatorname{div}(\vec{r} \times (\operatorname{grad} \phi))$

für ein C^1 -Vektorfeld \vec{u} und ein C^2 -Skalarfeld ϕ . Das „Vektorfeld“ \vec{r} bezeichne für jeden Punkt seinen Ortsvektor.

3. Eine Ladung q im Ursprung erzeugt das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\vec{x}}{|\vec{x}|^3}.$$

- (a) Berechne die Divergenz und die Rotation dieses Vektorfeldes (in allen Punkten in denen dies möglich ist).
- (b) Man berechne den Fluß des Vektorfeldes \vec{E} durch die (nach außen orientierte) Sphäre $\mathbb{S}_R = \{|\vec{x}| = R\}$

$$\int_{\mathbb{S}_R} \vec{E}(\vec{x}) \cdot d\vec{\sigma}.$$

Dabei bezeichne $d\vec{\sigma}$ das orientierte Flächenelement.

(c)* Gegeben seien zwei Ladungen q_1 und q_2 in Punkten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 . Man bestimme den Fluß des erzeugten Feldes \vec{E} durch die Ebene $\mathcal{E} = \{\vec{x} : \vec{x} \cdot \vec{n} = 0\}$ zum Normalenvektor \vec{n} .

4. In der Feldtheorie werden oft vektorwertige Integrale verwendet. Diese sind in **kartesischen** Koordinaten durch komponentenweise Integration definiert.

(a) Beweise den ersten Gaußschen Integralsatz

$$\int_V \text{grad } \phi \, dx = \oint_{\partial V} \phi \, d\vec{\sigma}$$

für $V \subset G$ glatt berandet und $\phi \in C^1(G)$.

Anmerkung: Entsprechend gilt auch der (in der Vorlesung behandelte skalarwertige) zweite Gaußsche Satz

$$\int_V \text{div } \vec{v} \, dx = \oint_{\partial V} \vec{v} \cdot d\vec{\sigma}$$

und der dritte Gaußsche Satz

$$\int_V \text{rot } \vec{v} \, dx = \oint_{\partial V} \vec{v} \times d\vec{\sigma}.$$

(b) Unter Verwendung der drei Gaußschen Sätze zeige man die folgenden Charakterisierungen der Differentialoperatoren grad, rot und div:

$$\begin{aligned} \text{grad } \phi(p) &= \lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{1}{|V|} \oint_{\partial V} \phi \, d\vec{\sigma}, \\ \text{rot } \vec{u}(p) &= \lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{1}{|V|} \oint_{\partial V} \vec{u} \times d\vec{\sigma}, \\ \text{div } \vec{u}(p) &= \lim_{|V| \rightarrow 0} \frac{1}{|V|} \oint_{\partial V} \vec{u} \cdot d\vec{\sigma}, \end{aligned}$$

dabei sei $V \subset G$ jeweils ein glatt berandetes Volumen um den Punkt $p \in G$.

Auf Grund dieser Beziehungen werden die Differentialoperatoren grad, rot und div auch als *Volumenableitungen* von Skalar- bzw. Vektorfeldern bezeichnet.

(c) Eine Differentialgleichung der Form

$$\text{div } \vec{u} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \tag{*}$$

für ein C^1 -Vektorfeld \vec{u} und ein Skalarfeld ρ wird als *conservation law* (Erhaltungssatz) bezeichnet.

Begründe daß Differentialgleichung (*) äquivalent zu

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dx = - \oint_{\partial V} \vec{u} \cdot d\vec{\sigma} \tag{**}$$

für jedes glatt berandete Volumen ist, wenn ρ und \vec{u} als C^1 vorausgesetzt werden.

Erkläre an Hand von (**), weshalb die Bezeichnung Erhaltungssatz gerechtfertigt ist.