6. Übung Vektoranalysis

Vorbereitungsaufgaben

1. *Schwingende Membran*

   Eine am Rand eingespannte Membran wird durch das Rand-Anfangswert-Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \Omega, \quad t \geq 0 \\ u(t,x) = 0, & x \in \partial\Omega, \quad t \geq 0 \\ u(0,x) = u_1(x), \quad u_t(0,x) = u_2(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

   für die Auslenkung $u = u(t,x)$ am Ort x zur Zeit t modelliert.

   Uns sollen nur zwei Spezialfälle interessieren, zum einen der Fall, daß $\Omega = (0,a) \times (0,b)$ ein Rechteck ist, zum anderen die kreisförmige Membran $\Omega = \{\, x \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| < 1 \,\}$.

   (a) Welcher der beiden Fälle ist einfacher und warum?

   (b) Man finde eine Lösungsdarstellung im Falle der rechteckigen Membran durch die Fouriersche Methode!

   (c) Man finde eine Lösungsdarstellung im Falle der kreisförmigen Membran durch die Fouriersche Methode! Dabei verwende man eine Darstellung in Polarkoordinaten.
   (Hinweis: In Polarkoordinaten gilt $\Delta = \partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{r^2}\partial_\omega^2$.)

   (d) Welche Frequenzen treten jeweils auf?
   Für reine Schwingungen (einer Frequenz) bezeichnet man die Menge $\{\, x \,|\, u(t,x) = 0, t \geq 0 \,\}$ als Knotenlinien. Man skizziere die Knotenlinien der Schwingungen mit den jeweils niedrigsten (drei) Frequenzen.