6. Übung Vektoranalysis

1. Betrachtet werden soll die Schwingung einer beidseitig eingespannten Saite der Länge π, beschrieben durch das Rand-Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & x \in (0,\pi),\ t > 0 \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \geq 0, \\ u(0,\cdot) = u_0, \quad u_t(0,\cdot) = u_1, & x \in [0,\pi], \end{cases}$$

zur Anfangsauslenkung u_0 und Anfangsgeschwindigkeit u_1. Unter Verwendung der Fourierschen Methode soll die/eine Lösung dieses Problems bestimmt werden. Welche 'Kompatibilitätsbedingungen' müssen dazu die Anfangsbedingungen u_0, u_1 erfüllen?

2. Im Vergleich soll in einem Stab der Länge π der an beiden Seiten auf die Temperatur 0 gekühlt wird, die Temperaturverteilung betrachtet werden. Dazu untersuchen wir

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in (0,\pi),\ t > 0, \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0, & t \geq 0, \\ u(0,\cdot) = u_0, & x \in [0,\pi]. \end{cases}$$

3. Als drittes Problem betrachten wir die Schwingungen einer massiven Platte, beschrieben durch die Gleichung vierter Ordnung

$$\begin{cases} u_{tt} = -\Delta^2 u, & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u(t,x) = \Delta u(t,x) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \geq 0, \\ u(0,\cdot) = u_0, \quad u_t(0,\cdot) = u_1 & x \in \Omega. \end{cases}$$

Dabei sei $\Omega = [0,\pi] \times [0,\pi]$.

Wie muß der Zugang abgeändert werden, wenn die Platte rechteckig mit Seitenlängen a und b gegeben ist?

4. Wie lassen sich die Lösungen der Plattengleichung

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f, & x \in \Omega, \\ u(t,x) = \Delta u(t,x) = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

darstellen, wenn man die Lösungen des zugehörigen Eigenwertproblems (vgl. 3.) kennt?