Prof. Dr. M. Reissig, Dipl.-Math. J. Wirth, Institut für Angewandte Analysis

Vektoranalysis (WS 2004/05) – Blatt 6

Vorbereitungs- / Belegaufgabe

Es kann nicht geleugnet werden, daß ein großer Teil der elementaren Mathematik von erheblichem praktischen Nutzen ist. Aber diese Teile der Mathematik sind, insgesamt betrachtet, ziemlich langweilig. Dies sind genau diejenigen Teile der Mathematik, die den geringsten ästhetischen Wert haben. Die „echte" Mathematik der „echten" Mathematiker, die Mathematik von Fermat, Gauß, Abel und Riemann ist fast völlig „nutzlos".
(Godefrey Harold Hardy)

Untersucht werden sollen Transversalschwingungen eines Stabes. Im Gegensatz zu Schwingungen einer Saite treten in einem Stab neben Längendeformationen auch Scherungen und damit verbundene Biegemomente auf. Dies führt dazu, daß die entstehende Differentialgleichung nicht mehr zweiter, sondern vierter Ordnung ist.

Bezeichnet $w(t,x)$ die Auslenkung des Stabes an der Stelle x und zum Zeitpunkt t, so gilt (unter der Annahme, daß die Auslenkung nicht zu groß ist)

$$w_{tt} + a^2 w_{xxxx} = 0, \qquad t \geq 0, |x| < L$$

wobei $2L$ die Länge des Stabes bezeichne und $a^2 = \frac{EJ}{\rho F}$ der Quotient aus Biegesteifigkeit des Stabes und der Dichte ist. Um die Lösung eindeutig zu bestimmen, benötigt man die Anfangsbedingungen

$$w(0,x) = w_0(x), \quad w_t(0,x) = w_1(x), \qquad |x| < L$$

zusammen mit geeigneten Randbedingungen[1]

0. $w(t,-L) = w_x(t,-L) = w(t,L) = w_x(t,L) = 0$,
   beidseitig eingespannter Stab,

1. $w(t,-L) = w_{xx}(t,-L) = w(t,L) = w_{xx}(t,L) = 0$,
   beidseitig drehbar gelagerter Stab,

2. $w(t,-L) = w_x(t,-L) = w_{xx}(t,L) = w_{xxx}(t,L) = 0$,
   links eingespannter und rechts freier Stab,

[1] *(die zugeordnete Randbedingung ergibt sich wieder einmal als Rest der Matrikelnummer bei Teilung durch 5)*

3. $w(t,-L) = w_x(t,-L) = w(t,L) = w_{xx}(t,L) = 0$,
   links eingespannter und rechts drehbar gelagerter Stab

4. $w(t,0) = 0$ und $w_{xx}(t,-L) = w_{xxx}(t,-L) = w_{xx}(t,L) = w_{xxx}(t,L) = 0$,
   mittig drehbar eingespannter Stab mit freien Enden,

die zusätzlich zu Kompatibilitätsbedingungen für die Anfangsdaten führen.

Lösen Sie dazu die folgenden Aufgabenstellungen:

1. Wie lauten die erwähnten Kompatibilitätsbedingungen?

2. Beschreiben Sie das prinzipielle Vorgehen zur Lösung des gegebenen Rand-Anfangswert-Problems mit Hilfe der Fourierschen Methode! Welche Schritte sind dabei insbesondere auszuführen?

3. Bestimmen Sie (näherungsweise) die Eigenfrequenzen der auftretenden Stabschwingungen und skizzieren Sie die Amplitude der Grundschwingung und der ersten beiden Oberschwingungen!

---

http://www.mathe.tu-freiberg.de/~wirth wirth@math.tu-freiberg.de