

Frühjahrsakademie Mathematik 2005

Reguläre und halbreguläre Polyeder

Jens Wirth

TU Bergakademie Freiberg
Fakultät für Mathematik und Informatik

Herausgeber: Dekan der Fakultät für Mathematik und Informatik
TU Bergakademie Freiberg
09596 Freiberg

Satz, Layout: Jens Wirth, wirth@math.tu-freiberg.de

Textsatz: L^AT_EX 2_ε

Druck: Medienzentrum der TU Bergakademie Freiberg

Finanziert aus Mitteln der **VolkswagenStiftung**

Einleitung

Eines der faszinierenden Probleme in der Geometrie ist die Beschreibung und Klassifikation von Gebilden, die mehr Symmetrien als andere besitzen und damit als ästhetischer und schöner empfunden werden. In der Ebene sind das die regelmäßigen Vielecke (*regulären Polygone*), deren Konstruierbarkeit mit Zirkel und Lineal als antikes Problem bis ins ausgehende achtzehnte Jahrhundert Generationen von Geometern beschäftigte und das seine endgültige Lösung dem jungen Carl Friedrich Gauß verdankt.

Hier soll nun das räumliche Äquivalent, die regelmäßigen und halbre regelmäßigen Körper, die Hauptrolle spielen. Im Gegensatz zu regelmäßigen Vielecken, die es zu jeder beliebigen Eckenzahl $n \geq 3$ gibt, existieren nur fünf solche Körper. Diese werden nach Plato als Platonische Körper bezeichnet.

In einem ersten Abschnitt sollen diese vorgestellt und der Beweis erbracht werden, daß es keine weiteren gibt. Ein zweiter Teil soll einige grundlegende Eigenschaften konvexer Körper vorstellen, um sie dann auf weniger reguläre Körper anwenden zu können. Abgerundet wird das Ganze dann mit einigen Aspekten der Dualitätstheorie in Ebene und Raum.

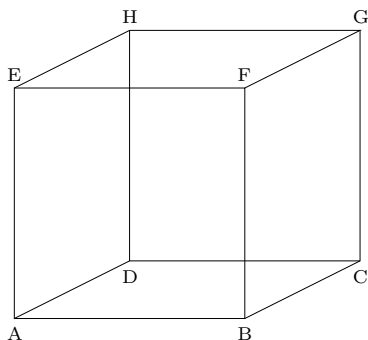
1 Die fünf Platonischen Körper

(Plato; 428 – 348 v.u.Z.)

Im folgenden soll unter einem Körper (*Polyeder*) ein zusammenhängendes Gebiet im Raum verstanden werden, dessen Oberfläche sich aus (ebenen) Vielecken (*Polygonen*) zusammensetzt. Körper besitzen also *Ecken*, *Kanten* und *Seitenflächen*. Während jede Kante genau zwei Ecken verbindet und ebenso zwei Seiten voneinander trennt, können in Ecken beliebig viele Kanten zusammenlaufen und Seiten durch beliebig viele Kanten begrenzt sein. Für eine Ecke e bezeichne die Anzahl der in ihr zusammenlaufenden Kanten ihren (*Ecken-*)Grad $EG(e)$ und für eine Seitenfläche s die Anzahl ihrer Ecken / der sie begrenzenden Kanten ihren (*Seiten-*)Grad $SG(s)$.

Definition 1. *Ein Polyeder heißt konvex, wenn er Durchschnitt endlich vieler Halbräume ist.*

Definition 2. *Einen konvexen Polyeder wollen wir als regelmäßig (regulär) bezeichnen, wenn einerseits seine Seitenflächen kongruente reguläre Polygone sind und andererseits an jeder Ecke gleich viele derartige Vielecke aneinanderstoßen.*



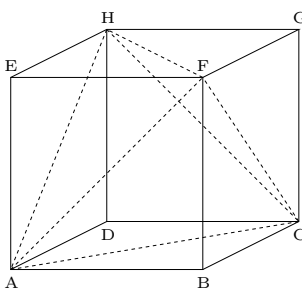
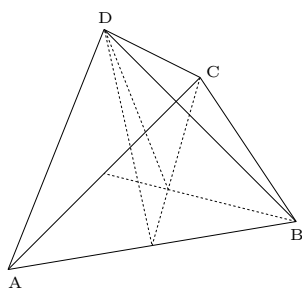
Einfachstes und bekanntestes Beispiel eines regulären Polyeders ist der Würfel (*Hexaeder*). Er besitzt

- 8 Ecken vom Grad 3,
- 12 Kanten,
- 6 Seitenflächen vom Grad 4.

Der Würfel ist nicht der einzige reguläre Polyeder, es gibt vier weitere. Um diese fünf vorzustellen und nebenbei zu zeigen, daß es keinen weiteren gibt, gehen wir systematisch vor. Für regelmäßige Körper sind Ecken- und Seitengrad Invarianten. Wir sortieren nach ihnen.

A) Seitengrad 3, von Dreiecken begrenzte Körper. An einer Ecke müssen mindestens drei Seitenflächen zusammenstossen. Ebenso könnten es vier oder fünf sein. Sechs Dreiecke würden in einer Ebene liegen, da $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ einen Vollwinkel bilden. Man kann sich leicht überlegen, daß es zu gegebenem Ecken und Seitengrad maximal einen Körper gibt, damit sind die folgenden drei die einzigen von Dreiecken begrenzten regulären Polyeder.

A1) Seiten- und Eckenrad 3 führt auf den sogenannten *Tetraeder*. Er besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken, besitzt vier Ecken und sechs Kanten.



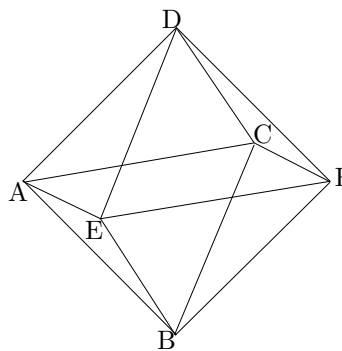
Wenn man seine Seitenlänge auf 1 normiert, lassen sich alle interessanten Größen mit dem Satz des Pythagoras berechnen. Zeichnet man in eine Seitenfläche die Seitenhalbierende ein, so ist der Höhenfußpunkt des Tetraeders Schwerpunkt der Grundfläche, teilt die Seitenhalbierende also im Verhältnis 1 : 2. Damit ergibt sich für die Länge der Seitenhalbierenden nach dem Satz des Pythagoras $\sqrt{3}/2$, für die Höhe des Tetraeders also $\sqrt{3/4 - 3/36} = \sqrt{8/12} = \sqrt{2/3} = \sqrt{6}/3$.

Ein Tetraeder erhält man übrigens auch, indem man im Würfel Seitendiagonalen als Kanten und zum Beispiel *A, C, F* und *H* als Ecken verwendet. Diese Idee kann man nutzen, um den Abstand zweier windschiefer Kanten am Tetraeder zu berechnen. Er beträgt bei Seitenlänge 1 offenbar $1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$.

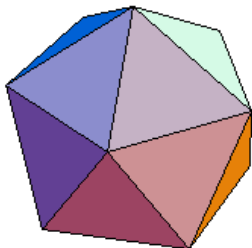
A2) Mit Eckengrad 4 entsteht der *Oktaeder*. Es besitzt sechs Ecken vom Grad 4, zwölf Kanten und acht Seitenflächen.

In einem Oktaeder lassen sich drei Quadrate finden, nämlich $AEFC$, $EBCD$ und $ABFD$. Diese liegen in Ebenen, die sich im Mittelpunkt paarweise orthogonal schneiden.

Ein Oktaeder erhält man, wenn man die Seitenmitten eines Würfels als Eckpunkte wählt.



A3) Es verbleibt der Körper mit Eckengrad 5. Dieser wird als *Ikosaeder* bezeichnet. Er wird von 20 Dreiecken als Seitenflächen begrenzt, besitzt zwölf Ecken und 30 Kanten.



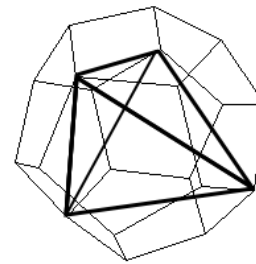
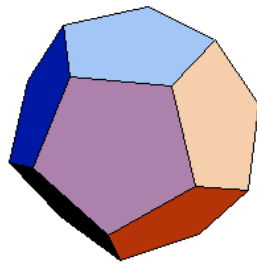
Aus den Ecken des Ikosaeders lassen sich zwölf regelmäßige Fünfecke bilden. Wie?

Das Ikosaeder läßt sich ausgehend vom Oktaeder konstruieren. Dazu kann man die zwölf Eckpunkte als Punkte der zwölf Kanten des Oktaeders verstehen.

Frage 1. In welchem Verhältnis muss man die Kanten des Oktaeders teilen, so daß die entstehenden Punkte ein Ikosaeder bilden?

B) Seitengrad 4, von Quadraten begrenzte Körper. Da vier Quadrate wieder in einer Ebene liegen, muß der Eckengrad 3 betragen und der Körper somit ein Würfel (*Hexaeder*) sein.

C) Seitengrad 5, von Fünfecken begrenzte Körper. Der Zentriwinkel eines Fünfecks beträgt 72° , einer seiner Innenwinkel also 108° . Da $4 \cdot 108^\circ > 360^\circ$ gilt, muß der Eckengrad also wiederum drei betragen. Der einzige Körper dieser Klasse ist also das *Dodekaeder*. Es besteht aus zwölf Fünfecken als Seitenflächen, hat 30 Kanten und 20 Ecken.



In einem Doedekaeder kann man vier Ecken so auswählen, daß diese ein Tetraeder bilden. Genauer: man kann die Ecken eines Dodekaeders in fuenf Klassen einteilen, von denen jede ein Tetraeder bildet.

Frage 2. Man finde in einem Dodekaeder acht Eckpunkte, die zusammen einen Würfel bilden.

Einen Dodekaeder kann man dadurch konstruieren, indem man in einem Ikosaeder die Seitenmittelpunkte als neue Eckpunkte wählt.

2 Sätze über konvexe Polyeder

Vorerst eine Bezeichnung. Für ein Polyeder bezeichne E die Menge der Eckpunkte, K die Menge der Kanten und S die Menge der Seitenflächen.

Die Polyederformel. Die oben genannten fünf Körper besitzen einige Eigenschaften, die sich sofort auf eine größere Klasse von Körpern übertragen lassen. So gilt für die Zahl $\#E$ der Ecken, die Zahl $\#K$ der Kanten und die Zahl $\#S$ der Seitenflächen stets die Beziehung $\#E - \#K + \#S = 2$, die man als *Eulersche Polyederformel*¹ bezeichnet.

Satz 1. (*Eulersche Polyederformel*)

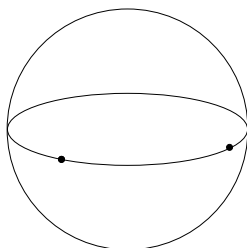
In jedem konvexen Polyeder gilt $\#E - \#K + \#S = 2$.

Der Beweis dieser Beziehung ist nicht zu schwer. Eine der Beweisideen ist die folgende: Da der Körper konvex ist, schneidet ihn jeder Strahl ausgehend von einem Punkt im Inneren genau einmal. Damit kann man den Körper auf eine ihn umgebende Kugel projizieren. Statt eines Körpers betrachten wir also eine Kugel, auf der Punkte (*Knoten*) gezeichnet sind, die durch Linien (*Kanten*) verbunden werden. Jeder Knoten ist dabei Endpunkt von mindestens drei Kanten und das so entstehende Netz (der *Graph*) ist zusammenhängend. Weiter verbinden Kanten dabei verschiedene Knoten und auf den

¹(Leonhard Euler, 1707 – 1783)

zwei Seiten einer Kante liegen verschiedene Flächen. Wir zeigen allgemeiner, daß für jede derartige Anordnung die Eulersche Polyederformel gilt.

Dazu nutzen wir eine einfache Idee. Wir entfernen Linien und Punkte und zeigen, daß dabei der Wert $\#E - \#K + \#S$ gleich bleibt. Eine Linie die zwei Knoten vom Grad größer oder gleich 3 verbindet, kann man streichen. Dabei verringert sich die Zahl der Linien um 1, die der Flächen um 1 und die der Knoten bleibt konstant. Analog kann man Knoten entfernen, die den Grad 2 besitzen. Dabei verringert sich die Zahl der Knoten und Kanten um 1, die der Flächen bleibt konstant. Dabei gibt es zwei Bedingungen zu beachten. Im zweiten Fall darf keine Kante entstehen die einen Knoten mit sich selbst verbindet. Im ersten Fall entsprechend keine Fläche die eine Kante zweimal als Rand

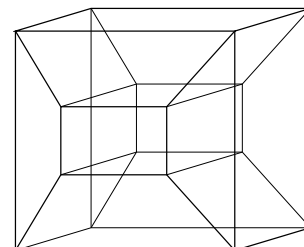


besitzt. Auf diese Weise kann man jeden konvexen Polyeder auf die nebenstehende Anordnung von zwei Knoten, zwei Kanten und zwei Flächen reduzieren. Einfaches Nachrechnen zeigt, daß dabei für die Invariante $2 - 2 + 2 = 2$ entsteht.

Die Eulersche Polyederformel hilft beim Zählen. Während die Zahl der Ecken und die

Zahl der Flächen oft durch einfache Überlegungen zu erhalten ist, ergibt sich die Zahl der Kanten direkt aus der Formel.

Für nichtkonvexe Körper kann $\#E - \#K + \#S$ durchaus andere Werte annehmen. Der folgende Körper, ein Quader mit einem quaderförmigen Loch und abgeschrägten Kanten, besitzt zum Beispiel 32 Kanten, 16 Ecken und 16 Seitenflächen. Für ihn gilt also $E - K + F = 16 - 32 + 16 = 0$.



Allgemein kann man durch die *Euler-Charakteristik* $E - K + F$ die Zahl der Löcher $\gamma = 1 - \frac{1}{2}(E - K + F)$ in einem Körper zählen. Die Zahl ist invariant unter stetigen Abbildungen der Körperoberfläche und wird als *Geschlecht* dieser Fläche bezeichnet.

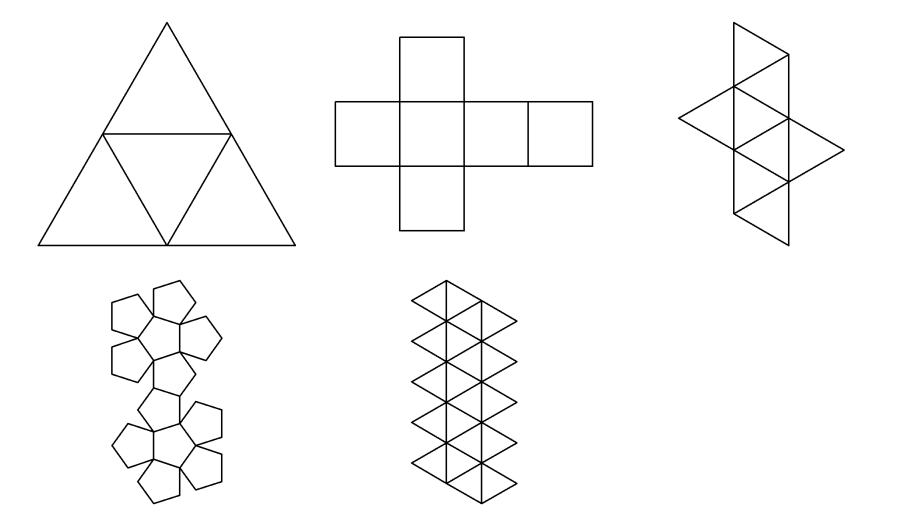
Für eine Kugel gilt $\gamma = 0$, für einen *Torus* entsprechend $\gamma = 1$, eine Kugel mit zwei *Henkeln* besitzt das Geschlecht $\gamma = 2$ und so weiter.

Abzählformeln. Neben der Eulerschen Polyederformel gelten noch weitere elementare Abzählformeln. So folgt aus den Inzidenzrelationen zwischen Ecken, Kanten und Seitenflächen und der Definition von Ecken- und Seitengrad unmittelbar

$$\sum_{e \in E} EG(e) = 2 \cdot \#K = \sum_{s \in S} SG(s).$$

Abrollbarkeit und Netze. Eine zweite Frage ist, inwieweit sich Polyeder aus Papier falten lassen. Für den Würfel ist bekannt, daß dies möglich ist, für den Tetraeder und

den Oktaeder ebenso einfach einzusehen. Für Ikosaeder und Dodekaeder sind die entsprechenden *Netze* mit wenig Aufwand zu konstruieren, hier fällt allerdings auf, daß man dabei nicht wahllos abrollen darf.



Es wird allgemein geglaubt, daß folgende die Aussage wahr ist. Ein Beweis ist bisher allerdings noch nicht gefunden worden. Es ist in dieser Allgemeinheit allerdings auch ein ernsthaftes Problem zu einem gegebenen konvexen Körper ein entsprechendes zulässiges (überschneidungsfreies) ebenes Netz zu konstruieren.

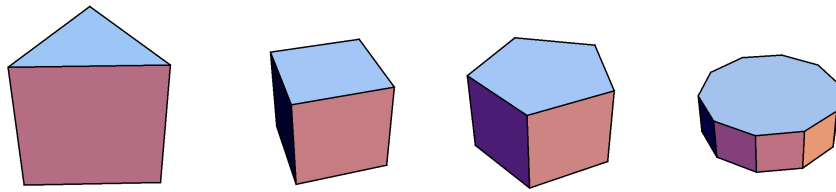
Vermutung (Shephard's Conjecture). *Jeder konvexe Polyeder ist in die Ebene überschneidungsfrei abrollbar, besitzt also ein ebenes Netz.*

Frage 3. Nutzt man ein Netz zum Falten eines Polyeders, so stellt sich die Frage, an welche Kanten Klebefalze anzubringen sind. Um die Frage zu beantworten kann man einerseits die Zuordnung zwischen den äußeren Kanten bestimmen, also herausfinden, welche mit welchen anderen verklebt werden. Eine der beiden muß dann mit einem entsprechenden Klebefalz versehen werden.

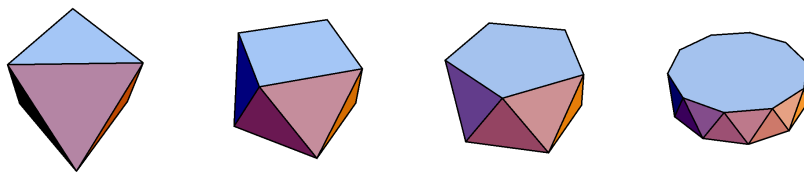
Man kann aber auch anders vorgehen. Wieso ist folgende Vorgehensweise korrekt? Man beginnt an einer Kante, diese bekommt einen Klebefalz. Dann umläuft man das Netz im Uhrzeigersinn und jede zweite Kante bekommt ebenso einen Klebefalz.

3 Prismen und Antiprismen

Aus regulären Polygonen lassen sich weitere Körper zusammensetzen, wir wollen hier zwei Klassen erwähnen. Dies sind zum einen die *Prismen*, die entstehen, wenn man zwei n -Ecke durch n Quadrate verbindet. Ein Spezialfall ist der Würfel mit $n = 4$.



Andererseits existiert die Klasse der *Antiprismen*, bei der die beiden n -Ecke versetzt angeordnet sind und durch zwei Reihen von Dreiecken verbunden werden. Ein Spezialfall ist das Oktaeder zu $n = 3$. Eingeführt wurden die Antiprismen durch Johannes Kepler² in seinen Betrachtungen *Harmonices Mundi*.



Beide Klassen besitzen eine Eigenschaft, die sie mit den Platonischen Körpern verbindet. Sie besitzen eine Umkugel und zu je zwei Ecken existiert eine Kongruenzabbildung (sogar eine Drehung) des Körpers, die die die Ecken ineinander überführt.

Frage 4. Wie groß ist das Volumen eines Prismas/Antiprismas der Kantenlänge 1 und der Eckenzahl $2n$?

4 Die dreizehn Archimedischen Körper

(Archimedes von Syrakus; 285 – 212 v.u.Z)

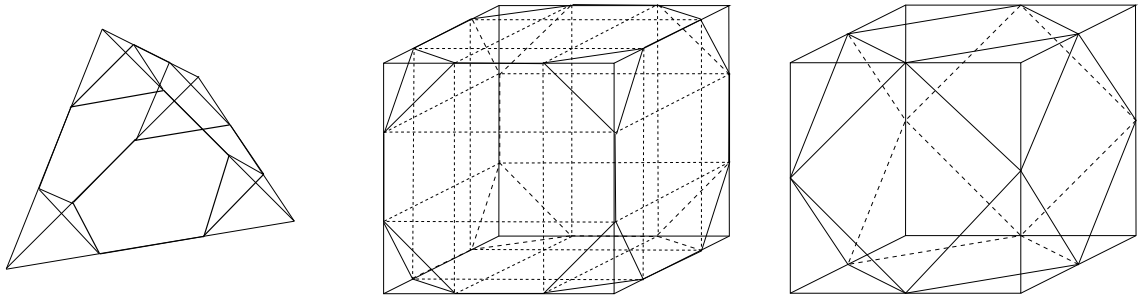
Definition 3. Ein konvexer Polyeder heißt halbbregulär, falls seine Seitenflächen reguläre Polygone sind und es zu je zwei Ecken eine Drehung des Körpers auf sich gibt, die die Ecken ineinander überführt.

Damit sind offenbar reguläre Polyeder halbbregulär, ebenso Prismen und Antiprismen. Alle weiteren halbbregulären Körper werden als *Archimedische Körper* bezeichnet. Es gibt bis auf Kongruenz genau 13 Archimedische Körper.

Um dies zu zeigen und dabei alle Archimedischen Körper zu konstruieren kann man wieder wie vorher bei den Platonischen vorgehen und diese nach ihren (invarianten!) Eckengraden sortieren. Diesmal existieren allerdings nicht zu allen Kombinationen, die Ecken liefern, auch tatsächlich Körper, was die Konstruktion etwas schwieriger macht.

Ein anderer Zugang, der den Wunsch nach Vollständigkeit außer Acht läßt, besteht darin durch „Abschneiden“ von Ecken (und Kanten) neue Körper zu konstruieren. Die einfachsten dabei entstehenden Körper sind nachfolgend skizziert.

²(Johannes Kepler; 1571–1630)

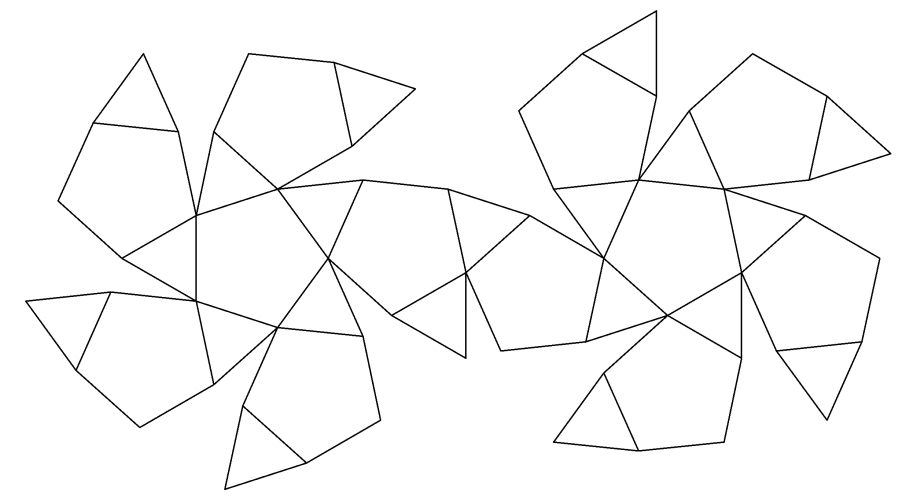


Auf diese Weise können 11 der 13 Archimedischen Körper konstruiert werden. Ausnahme sind die beiden Körper mit Eckengrad 5. In der folgenden Tabelle sind, sortiert nach Eckengraden, die Konstruktionsschemata aller halbregulären Polyeder aufgelistet.

EG	Schema	E	K	F	Name
3	3,6,6	12	18	8	abgestumpftes Tetraeder
3	3,8,8	24	36	14	abgestumpftes Hexaeder
3	3,10,10	60	90	32	abgestumpftes Dodekaeder
3	4,6,6	24	36	14	abgestumpftes Oktaeder
3	5,6,6	60	90	32	abgestumpftes Ikosaeder
3	4,6,8	48	72	26	großes Rombenkuboktaeder
3	4,6,10	120	180	62	großes Rhombenikosidodekaeder
4	3,4,3,4	12	24	14	Kuboktaeder
4	3,4,4,4	24	48	26	(kleines) Rhombenkuboktaeder
4	3,5,3,5	30	60	32	Ikosidodekaeder
4	3,4,5,4	60	120	62	(kleines) Rhombenikosidodekaeder
5	3,3,3,3,4	24	60	38	Cubus simus
5	3,3,3,3,5	60	150	92	Dodekaedron simum

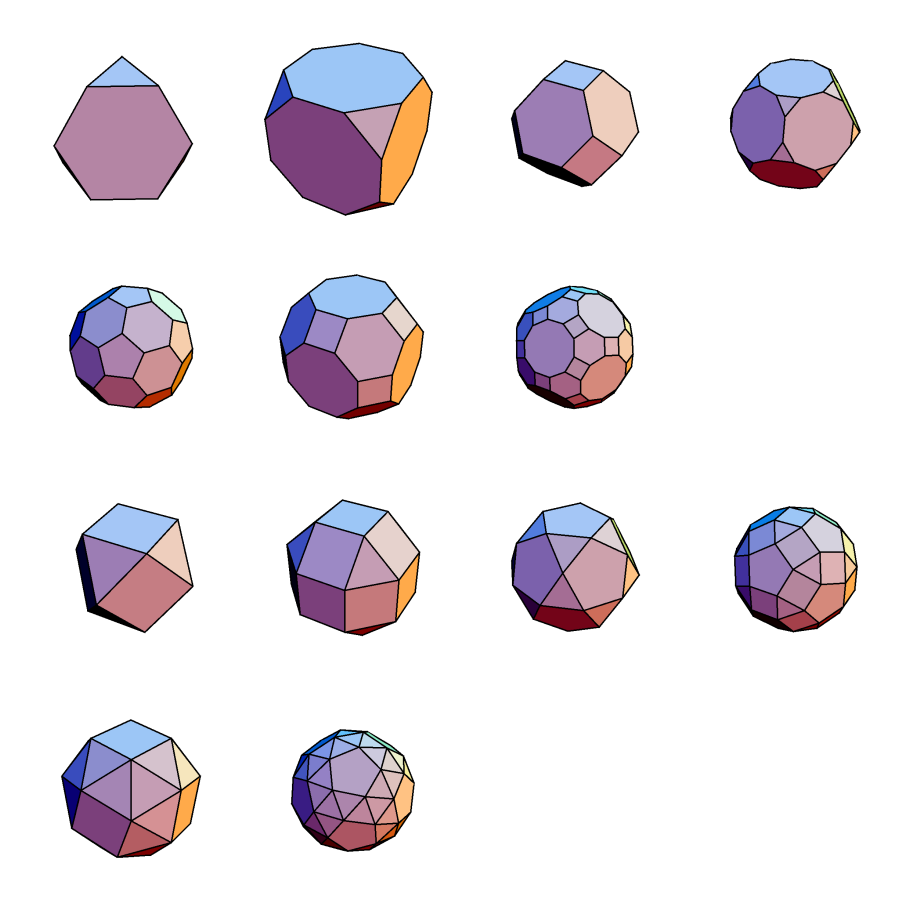
Frage 5. Wie konstruiert man aus dem in obiger Tabelle angegebenen Eckenschema ein (korrektes) Netz des zugehörigen Körpers?

Nachfolgend dargestellt ist das Netz eines Ikosidodekaeders.



Frage 6. Wieso existiert kein Körper von Eckengrad 3 und mit dem Eckenschema 4, 5, 5?

Die folgende Darstellung zeigt alle dreizehn Archimedischen Körper in der Reihenfolge obiger Tabelle.



Die beiden Archimedischen Körper mit Eckengrad 5 sind *chirale Körper*, da sie in zwei verschiedenen Orientierungen vorkommen. Im Gegensatz zu allen anderen gehen sie bei einer Spiegelung nicht in sich selbst über.

Die Beschreibung aller 13 Archimedischen Körper und ebenso die Vollständigkeit dieser Auflistung geht auf Kepler zurück. Die meisten der Körper waren allerdings schon Archimedes bekannt.

5 Deltaeder und Johnson-Körper

Frage 7. Welche konvexen Körper gibt es, die nur von gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen begrenzt sind? Versuche alle diese sogenannten *Deltaeder* zu finden!

Um die Beantwortung der Frage zu vereinfachen, zwei Hinweise: Zum Einen gibt es genau acht bis auf Ähnlichkeit eindeutig bestimmte Deltaeder. Wenn man acht gefunden hat, kann man also aufhören (oder die Frage beantworten, warum es nicht mehr geben kann). Andererseits kann man das Nachdenken durch Basteln unterstützen. Deltaeder lassen sich einfach durch Zahnstocher für die Kanten und Kugeln aus Knete für die Ecken bauen.

Die allgemeine Frage, wieviele konvexe Körper es gibt, die nur durch reguläre Polyeder als Seitenflächen begrenzt sind, hat Norman Johnson³ 1966 beantwortet. Außer den bereits erwähnten Platonischen und Archimedischen Körpern, sowie den Prismen und Antiprismen gibt es bis auf Ähnlichkeit genau 92 solcher Körper. Ihm zu Ehren werden diese 92 Körper als *Johnson-Körper* bezeichnet.

Einfache Beispiele solcher Körper sind *Pyramiden* mit regelmäßigen Grundflächen und gleichseitigen Dreiecken in der Mantelfläche. Neben dem Tetraeder funktioniert diese Konstruktion mit der vierseitigen und mit der fünfseitigen Pyramide. Wie man an Hand der Vorstellung zu Beginn dieses Heftes gesehen hat, ist ein Oktaeder aus zwei vierseitigen Pyramiden zusammengesetzt.

6 Dual-Archimedische Körper

Die Archimedischen Körper verallgemeinern zwei Eigenschaften Platonischer Körper. Zum Einen besitzen sie eine Umkugel (verbunden mit der Invarianz unter Rotationen) und zum Anderen sind sie durch reguläre Polygone begrenzt. Man könnte anders vorgehen und nach Körpern suchen, welche eine Inkugel besitzen und deren Ecken dieselbe Gleichförmigkeit aufweisen, wie die der Platonischen Körpern. Dies führt auf den Begriff der *Dual-Archimedischen Körper* oder *Catalanischen Körper*⁴.

³Norman W. Johnson, Dissertation, Toronto 1966

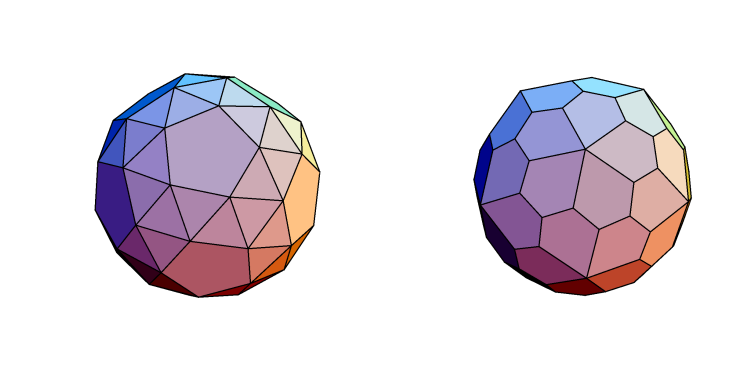
⁴(Eugène Charles Catalan; 1814–1894)

Wir definieren Dual-Archimedische Körper durch eine Konstruktion. Wir beginnen mit einem Archimedischen Körper und seiner Umkugel. Durch jeden Eckpunkt der Umkugel zeichnen wir die Tangentialebene und definieren den Durchschnitt der Halbräume die die Kugel enthalten als den zugeordneten Dualkörper.

Offenbar ist der so konstruierte Dualkörper konvex und enthält die Umkugel des Ausgangskörpers als Inkugel. Wendet man die Konstruktion auf einen der Platonischen Körper an, so entsteht wiederum ein solcher. Genauer gilt

- aus dem Tetraeder wird wieder ein Tetraeder,
- aus dem Oktaeder ein Würfel und umgekehrt,
- aus dem Ikosaeder wird ein Dodekaeder und umgekehrt.

Die Konstruktion hat jeder Ecke eine Seitenfläche (einen Teil der Tangentialebene) zugeordnet; zwei solche Seitenflächen haben eine gemeinsame Kante, wenn vorher die Punkte durch eine Kante verbunden waren. Betrachtet man die n Eckpunkte einer Seitenfläche vom Grad n , so schneiden sich die n Tangentialebenen dieser Eckpunkte in einem Punkt, der Seitenfläche vom Grad n wird also eine Ecke vom Grad n zugeordnet. Die Regelmäßigkeit des n -Ecks spiegelt sich in einer Regelmäßigkeit der zugeordneten Ecke wieder. Betrachtet man die n in dieser Ecke zusammenlaufenden Kanten vom Inkugelmittelpunkt aus, so schneiden sich diese mit gleichen Winkeln.



7 Abschließende Bemerkungen

Die meisten Darstellungen in diesem Heft sind mit dem Computeralgebrasystem *Mathematica*, [4], erzeugt. Für *Mathematica* gibt es eine Reihe von Zusatzpaketen, die Archimedische Körper und allgemeiner alle Johnson-Körper erzeugen. Ergänzend zu diesem Heft gibt es ein Notebook für *Mathematica*, welches auf meiner Homepage [1] zu finden ist.

Weiterführende Informationen findet man in Büchern über Geometrie. Der Einfachheit halber sei nur auf [2] verwiesen.

Die Darstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Es gibt neben den hier vorgestellten regulären und halbrekulären Polyedern und ihren Verallgemeinerungen nach Johnson noch weitere interessante konvexe Körper. Ebenso gibt es weitere spannende Fragestellungen, auf die hier in der Kürze der Zeit nicht eingegangen werden konnte. Ein Beispiel wäre die *Stabilität* der Körper, d.h. ob die einzelnen (an den Ecken flexibel verbundenen Kanten) schon ein stabiles Gerüst des Körpers bilden oder der so konstruierte Körper noch “deformierbar” ist. An Hand der erwähnten Modelle für Deltaeder ist es leicht auszutesten, dass alle Deltaeder in diesem Sinne stabil sind.

Literatur

- [1] <http://www.mathe.tu-freiberg.de/wirth/>
- [2] Marcel Berger: *Geometry I+II*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987
- [3] <http://www.mathecafe.de/>
- [4] <http://www.wolfram.com/>
- [5] <http://www.wikipedia.de/>