

# Gleichungssysteme und symmetrische Polynome

Jens Wirth, Freiberg  
wirth@math.tu-freiberg.de

Wir wollen unsere Betrachtungen mit folgendem Beispiel beginnen.

**Beispiel 1** Zu lösen sei das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 4, \\x^3 + y^3 &= 8.\end{aligned}$$

Wie kann man dazu vorgehen? Die Gleichungen ineinander einzusetzen um als Ergebnis eine Gleichung für eine der Variablen zu erhalten ist nicht praktikabel, da dabei eine Gleichung sechsten Grades entsteht.

Wir nutzen stattdessen die Symmetrie der Gleichungen. Wir führen die neuen Variablen  $\sigma_1 = x + y$  und  $\sigma_2 = xy$  ein, so dass

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \\x^3 + y^3 &= \sigma_1^3 - 3(x^2y + xy^2) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2\end{aligned}$$

gilt und damit das Gleichungssystem äquivalent ist zu

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 - 2\sigma_2 &= 4, \\ \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 &= \sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = \sigma_1(4 - \sigma_2) = 8.\end{aligned}$$

Damit verbleibt nur noch eine Gleichung dritten Grades zu lösen, nämlich

$$\sigma_1^2 - 2(4 - 8/\sigma_1) = 4, \quad \text{d.h.} \quad \sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16 = 0.$$

Wie man durch Einsetzen sieht, ist 2 eine Lösung. Division durch den zugehörigen Linearfaktor liefert

$$(\sigma_1^3 - 12\sigma_1 + 16)/(\sigma_1 - 2) = \sigma_1^2 + 2\sigma_1 - 8 = (\sigma_1 - 2)(\sigma_1 + 4)$$

und damit die weitere Lösung  $\sigma_1 = -4$ . Somit erhalten wir zwei Paare von Lösungen,  $(\sigma_1, \sigma_2) = (2, 0)$  und  $(\sigma_1, \sigma_2) = (-4, 6)$ . Zum Berechnen der  $x$  und  $y$  haben wir noch die Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ll}x + y = 2, & x + y = -4, \\xy = 0, & xy = 6\end{array}$$

zu lösen. Das erste besitzt die beiden Lösungen  $x = 0, y = 2$  und  $x = 2, y = 0$ ; das zweite ist im Bereich der reellen Zahlen nicht lösbar.  $\square$

---

This material belongs to the Public Domain KoSemNet data base. It can be freely used, distributed and modified, if properly attributed. Details are regulated by the *Creative Commons Attribution License*, see <http://creativecommons.org/licenses/by/2.0>.  
For the KoSemNet project see <http://lsgm.uni-leipzig.de/KoSemNet>.

Wir wollen uns im folgenden mit Gleichungssystemen und der Ausnutzung von Symmetrien intensiver beschäftigen und einige wichtige Resultate dazu vorstellen.

## 1 Elementarsymmetrische Funktionen

Seien  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  die Nullstellen des Polynoms

$$P(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = \prod_{j=1}^n (x - x_j). \quad (1)$$

Multipliziert man dieses Polynom aus, so erhält man

$$P(x) = x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \sigma_2 x^{n-2} \mp \cdots (-1)^n \sigma_n \quad (2)$$

mit den Koeffizienten

$$\sigma_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{|J|=k} \prod_{j \in J} x_j. \quad (3)$$

Diese werden als *elementarsymmetrische Funktionen* der Variablen  $x_1, \dots, x_n$  bezeichnet. Die beiden letzten Formeln zusammen liefern den bekannten *Vieta'schen Wurzelsatz*.

**Beispiel 2** Als Beispiele erhält man für  $n = 2$  die beiden Funktionen  $\sigma_1(x, y) = x + y$  und  $\sigma_2(x, y) = xy$ , die uns in der Einleitung schon begegnet sind. Für  $n = 3$  ergibt sich entsprechend

$$\sigma_1(x, y, z) = x + y + z, \quad \sigma_2(x, y, z) = xy + yz + zx \quad \text{und} \quad \sigma_3(x, y, z) = xyz. \quad (4)$$

□

Ein Polynom in  $n$  Variablen heißt *symmetrisch*, falls

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)}) \quad (5)$$

für jede *Permutation*  $\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$  der Indizes gilt. Die elementarsymmetrischen Funktionen sind symmetrisch, ebenso ist für jedes Polynom  $g$  das Polynom  $g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  symmetrisch. Es gilt sogar die Umkehrung dieser Aussage:

**Satz 1 (Hauptsatz über symmetrische Polynome)** *Zu jedem symmetrischen Polynom  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  existiert genau ein Polynom  $g$  in  $n$  Variablen, so dass*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (6)$$

*gilt.*

*Beweis.* [1] Wir ordnen die Summanden des gegebenen Polynoms lexikographisch, d.h. so dass  $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  dem  $x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n}$  vorangeht, falls die erste nichtverschwindende Differenz  $\alpha_i - \beta_i > 0$  erfüllt.

Sei nun  $a x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  das Anfangsglied des symmetrischen Polynoms. Dann kommen auch alle Terme vor, in denen nur die Exponenten permutiert sind, es ist also insbesondere  $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \alpha_n$ . Wir bilden

$$a \sigma_1^{\alpha_1 - \alpha_2} \sigma_2^{\alpha_2 - \alpha_3} \dots \sigma_{n-1}^{\alpha_{n-1} - \alpha_n} \sigma_n^{\alpha_n}$$

und subtrahieren diesen Term vom Ausgangspolynom. Dadurch subtrahieren wir insbesondere alle aus  $ax_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$  durch Permutation hervorgegangenen Glieder. Da das Produkt selbst den Grad

$$(\alpha_1 - \alpha_2) + 2(\alpha_2 - \alpha_3) + 3(\alpha_3 - \alpha_4) + \dots + (n-1)(\alpha_{n-1} - \alpha_n) + n\alpha_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = k,$$

also den Grad des Ausgangspolynoms hat, erhöht sich dieser nicht. Weil es nur endlich viele Glieder vom Grad  $k$  gibt und wir diese dabei in lexikographischer Reihenfolge eliminieren, erhalten wir irgendwann ein symmetrisches Polynom vom Grad 0 und das Verfahren terminiert nach endlich vielen Schritten.  $\square$

Die Umwandlung eines symmetrischen Polynoms  $f$  in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  in ein Polynom  $g$  in den symmetrischen Variablen  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  bringt oft einen Informationsgewinn über die Struktur des Polynoms. Dazu ein Beispiel:

**Beispiel 3** Es soll das Polynom  $x^4 + y^4$  in (symmetrische) Faktoren zerlegt werden. Dazu schreiben wir es in symmetrische Variablen um. Es gilt

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= \sigma_1^4 - 4(x^3y + xy^3) - 6x^2y^2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_2(x^2 + y^2) - 6\sigma_2^2 \\ &= \sigma_1^4 - 4\sigma_2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 6\sigma_2^2 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 \\ &= (\sigma_1^2 - (2 + \sqrt{2})\sigma_2)(\sigma_1^2 - (2 - \sqrt{2})\sigma_2) \\ &= (x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy)(x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy) \end{aligned}$$

$\square$

Ein Polynom in  $n$  Variablen heißt *antisymmetrisch*, falls

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{sign}(\pi) f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)}), \quad (7)$$

d.h. falls sich bei jeder *Vertauschung* zweier Variablen das Vorzeichen ändert. Auch antisymmetrische Polynome sind durch elementarsymmetrische Funktionen charakterisierbar. Es gilt

**Satz 2** Sei  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ein antisymmetrisches Polynom. Dann gilt

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = h(x_1, x_2, \dots, x_n) \prod_{i \neq j} (x_i - x_j) \quad (8)$$

mit einem symmetrischen Polynom  $h$ .

*Beweisidee.* Wir betrachten vorerst nur zwei Variablen. Dann ist  $f$  antisymmetrisch, falls  $f(x, y) = -f(y, x)$  gilt. Insbesondere ist also  $f(x, x) = -f(x, x) = 0$ . Damit ist, wenn man  $f$  als Polynom in  $x$  mit Koeffizienten in Form von Polynomen in  $y$  betrachtet  $x = y$  eine Nullstelle. Damit kann man aber den passenden Linearfaktor abspalten und erhält

$$f(x, y) = (x - y)g(x, y)$$

mit einem geeigneten Polynom  $g$ . Im allgemeinen Fall betrachten wir  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  als Polynom in den Variablen  $x_1$  und  $x_2$  mit Koeffizienten die von den restlichen Variablen abhängen und wenden obigen Spezialfall an. Vertauschen der Variablen liefert dann die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 4** Man untersuche, ob sich das Polynom

$$f(x, y, z) = (x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$$

in Faktoren zerlegen läßt.

*Lösung.* Das Polynom ist offensichtlich antisymmetrisch, genügt also obigem Satz. Damit gilt  $f(x, y, z) = (x - y)(y - z)(z - x)h(x, y, z)$  mit einem symmetrischen Polynom  $h$ . Da aber die linke Seite den Grad 3 besitzt, muß  $h$  vom Grad 0 sein, also eine Konstante. Einsetzen von speziellen Werten liefert  $f(1, 0, -1) = 1 + 1 - 8 = -6 = -2h$  und damit  $h = 3$ . Also gilt

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 3(x - y)(y - z)(z - x).$$

□

**Beispiel 5** [2] Welche Bedingungen müssen die Zahlen  $a, b, c$  erfüllen, so dass das überbestimmte System

$$x + y = a, \quad x^2 + y^2 = b, \quad x^3 + y^3 = c$$

lösbar ist?

*Lösung.* Wir transformieren auf symmetrische Variablen. Das liefert  $\sigma_1 = a$ ,  $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = b$  und  $\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = c$ . Damit muß

$$a^2 - b = 2\sigma_2, \quad a^3 - \frac{3}{2}a(a^2 - b) = c$$

also

$$a^3 - 3ab + 2c = 0$$

gelten.

□

**Beispiel 6** [2, Kap. 10] Man finde alle reellen Lösungen des Gleichungssystems

$$x + y + z = 1, \quad x^3 + y^3 + z^3 + xyz = x^4 + y^4 + z^4 + 1.$$

*Lösung.* Mit Hilfe der elementarsymmetrischen Polynome erhalten wir

$$\sigma_1 = 1, \quad \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 4\sigma_3 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 1,$$

d.h. nach Einsetzen von  $\sigma_1$  die quadratische Gleichung

$$2\sigma_2^2 - \sigma_2 + 1 = 0.$$

Diese besitzt aber keine reellen Lösungen und das obige System ist unlösbar.

□

**Beispiel 7** [2, Kap. 10] Seien  $x_1$  und  $x_2$  die Nullstellen des Polynoms  $x^2 - 6x + 1$ . Dann ist für jede natürliche Zahl  $k$  die Zahl  $x_1^k + x_2^k$  eine nicht durch 5 teilbare natürliche Zahl.

*Lösung.* Die Potenzsumme  $s_k = x_1^k + x_2^k$  ist symmetrisch, also durch die elementarsymmetrischen Funktionen  $\sigma_1 = x_1 + x_2 = 6$  und  $\sigma_2 = x_1x_2 = 1$  ausdrückbar. Dazu leiten wir für die  $s_k$  eine Rekursion ab. Es gilt

$$s_k = x_1^k + x_2^k = (x_1 + x_2)(x_1^{k-1} + x_2^{k-1}) - x_1x_2^{k-1} - x_1^{k-1}x_2 = \sigma_1s_{k-1} - \sigma_2s_{k-2},$$

also mit  $s_0 = 2$  und  $s_1 = \sigma_1 = 6$  erfüllen die  $s_k$  die Rekursion  $s_k = 6s_{k-1} - s_{k-2}$ . Da wir nur an Teilbarkeitsaussagen modulo 5 interessiert sind, nutzen wir

$$s_0 \equiv 2, \quad s_1 \equiv 1, \quad s_k \equiv s_{k-1} - s_{k-2}$$

und erhalten die (periodische) Folge

$$s_2 \equiv 4, \quad s_3 \equiv 3, \quad s_4 \equiv 4, \quad s_5 \equiv 1, \quad s_6 \equiv 2, \quad s_7 \equiv 1, \dots$$

Da keine 5 auftritt, haben wir die Behauptung gezeigt.  $\square$

**Beispiel 8** [3, Kap. 5.4] Bekannt ist, dass das Produkt zweier Nullstellen des Polynoms

$$x^4 - 18x^3 + kx^2 + 200x - 1984 = 0$$

den Wert  $-32$  besitzt. Man bestimme den Wert von  $k$ .

*Lösung.* Seien  $a, b, c, d$  die Nullstellen des Polynoms. Dann erfüllen diese nach dem Vietaschen Wurzelsatz

$$\begin{aligned} a + b + c + d &= 18, \\ ab + ac + ad + bc + bd + cd &= k, \\ abc + abd + acd + bcd &= -200, \\ abcd &= -1984. \end{aligned}$$

Wir nehmen o.B.d.A. an, dass  $ab = -32$  gilt. Dann erfüllen wegen  $1984 = 32 \cdot 62$  und damit  $cd = 62$  die Nullstellen das System

$$\begin{aligned} (a + b) + (c + d) &= 18, \\ 30 + (a + b)(c + d) &= k, \\ -32(c + d) + 62(a + b) &= -200. \end{aligned}$$

Um das zu lösen setzen wir  $u = a + b$  und  $v = c + d$  und erhalten das lineare Gleichungssystem

$$u + v = 18, \quad 62u - 32v = -200,$$

dessen Lösung  $u = 4$  und  $v = 14$  ist. Einsetzen liefert unmittelbar  $k = 30 + 4 \cdot 14 = 86$ .  $\square$

## 2 Symmetrische Mittel und der Satz von Muirhead

Sei  $f(x_1, \dots, x_n)$  ein Polynom. Dann kann man aus  $f$  durch *Symmetrisieren* ein symmetrisches Polynom konstruieren. Dazu setzen wir

$$\sum_{sym} f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\pi} f(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \dots, x_{\pi(n)}), \quad (9)$$

addieren also alle  $n!$  Permutationen der Argumente.

Ein Spezialfall soll dabei hervorgehoben werden. Ist  $f(x_1, \dots, x_n)$  ein *Monom*, d.h. ein Ausdruck der Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad (10)$$

für einen Multiindex  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , so setzen wir

$$\mathcal{S}\{\alpha\} = \mathcal{S}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} = \frac{1}{n!} \sum_{sym} x^\alpha \quad (11)$$

und bezeichnen  $\mathcal{S}\{\alpha\}(x_1, \dots, x_n)$  als  $\alpha$ -tes *symmetrisches Mittel*. Offensichtlich hängt  $\mathcal{S}\{\alpha\}$  nicht von der Reihenfolge der Indizes  $\alpha_i$  ab, so dass wir

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_n \quad (12)$$

voraussetzen wollen.

**Beispiel 9** Einfachstes Beispiel ist das *arithmetische Mittel*

$$\mathcal{S}\{1, 0, \dots, 0\} = \frac{(n-1)!}{n!} (x_1 + \dots + x_n) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}.$$

Betrachtet man nur positive  $x_i$ , so kann man beliebige reelle Zahlen als Indizes zulassen. Dann erhält man für

$$\mathcal{S}\{1/n, \dots, 1/n\} = \frac{n!}{n!} x_1^{1/n} \dots x_n^{1/n} = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

das *geometrische Mittel*. □

Für symmetrische Mittel gibt es eine Mittelungleichung. Für diese benötigen wir eine Ordnungsrelation für Multiindizes. Wir schreiben  $\alpha \prec \beta$ , falls

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = \beta_1 + \dots + \beta_n = |\beta| \quad (13)$$

$$\alpha_1 + \dots + \alpha_k \geq \beta_1 + \dots + \beta_k, \quad k = 1, \dots, n \quad (14)$$

gilt.

**Satz 3 (Satz von Muirhead)** *Es gilt  $\mathcal{S}\{\alpha\}(x_1, \dots, x_n) \leq \mathcal{S}\{\beta\}(x_1, \dots, x_n)$  genau dann für alle  $x_i > 0$ , wenn  $\alpha \prec \beta$  gilt. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn  $\alpha = \beta$  oder  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$  gilt.*

*Beweis.* [1] Wir skizzieren nur die wichtigsten Beweisideen. Um zu zeigen, dass  $\alpha \prec \beta$  notwendig ist, setzen wir  $x_1 = \dots = x_i = y$  und  $x_{i+1} = \dots = x_n = 1$  und erhalten aus der Ungleichung unmittelbar  $\alpha_1 + \dots + \alpha_i \leq \beta_1 + \dots + \beta_i$ . Im Falle  $i = n$  muß Gleichheit gelten, da sonst beide Seiten homogene Polynome verschiedenen Grades sind und die Ungleichung nicht für alle  $y$  gelten kann.

Der Beweis der Hinlänglichkeit von  $\alpha \prec \beta$  erfolgt durch Induktion über die Variablenanzahl  $n$  und nutzt folgende Hilfsaussagen (bei denen die Ordnung der Indizes unerheblich ist):

**Lemma 1 (Transformationslemma)** *Es gilt*

$$\mathcal{S}\{\rho + \delta, \rho - \delta, \alpha_3, \dots, \alpha_n\} \geq \mathcal{S}\{\rho + \tau, \rho - \tau, \alpha_3, \dots, \alpha_n\}$$

für alle  $0 \leq \tau < \delta \leq \rho$  mit Gleichheit für  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

Zum Beweis betrachten wir einfach die Differenz beider Seiten und erhalten

$$\begin{aligned}
& n! \mathcal{S}\{\rho + \delta, \rho - \delta, \alpha_3, \dots, \alpha_n\} - n! \mathcal{S}\{\rho + \tau, \rho - \tau, \alpha_3, \dots, \alpha_n\} \\
&= \sum_{sym} (x_1^{\rho+\delta} x_2^{\rho-\delta} + x_1^{\rho-\delta} x_2^{\rho+\delta} - x_1^{\rho+\tau} x_2^{\rho-\tau} + x_1^{\rho-\tau} x_2^{\rho+\tau}) x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n} \\
&= \left( \sum_{sym} x_3^{\alpha_3} \dots x_n^{\alpha_n} \right) (x_1 x_2)^{\rho-\delta} (x_1^{\delta-\tau} - x_2^{\delta-\tau}) (x_1^{\delta+\tau} - x_2^{\delta+\tau}) > 0
\end{aligned}$$

in den beiden Fällen  $x_1 < x_2$  und  $x_1 > x_2$ . Gleichheit tritt genau für  $x_1 = x_2$  ein.

**Lemma 2 (Expansionslemma)** Die Ungleichung  $\mathcal{S}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \leq \mathcal{S}\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  impliziert  $\mathcal{S}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, \delta\} \leq \mathcal{S}\{\beta_1, \dots, \beta_n, \delta\}$  für jedes  $\delta \geq 0$ .

Zum Beweis bemerken wir zuerst, dass der Fall  $\delta = 0$  trivial ist, da  $\mathcal{S}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n, 0\} = \mathcal{S}\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  gilt. Insbesondere folgt also aus der Voraussetzung

$$\mathcal{S}\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_i, \dots, \alpha_n\} \leq \mathcal{S}\{\beta_1, \dots, \beta_{i-1}, 0, \beta_i, \dots, \beta_n\}.$$

Multipliziert man diese Ungleichungen mit  $x_i^\delta$  und addiert die entstehenden  $n+1$  Ungleichungen, so erhält man die Behauptung.

Die beiden Lemmata genügen um den Satz von Muirhead zu beweisen. Lemma 1 impliziert den Induktionsanfang für  $n = 2$ , also  $\mathcal{S}\{\rho+\delta, \rho-\delta\} \geq \mathcal{S}\{\rho+\tau, \rho-\tau\}$  mit  $2\rho = \alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$  und entsprechenden  $\delta$  und  $\tau$ . Für den allgemeinen Fall nutzen wir nun Lemma 1 um gleiche Indizes in beiden Ungleichungen zu erzwingen, die wir dann unter Nutzung von Lemma 2 streichen können. Deshalb nehmen wir für das Folgende  $\alpha_i \neq \beta_i$  an. Da  $\sum(\alpha_k - \beta_k) = 0$  gilt, existieren positive und negative Differenzen. Die erste ist negativ (da  $\alpha < \beta$ ). Sei  $k$  der Index der ersten positiven Differenz. Dann gilt  $\alpha_{k-1} < \beta_{k-1}$  und  $\alpha_k > \beta_k$  und somit auch  $\beta_k < \alpha_k \leq \alpha_{k-1} < \beta_{k-1}$ . Sei nun  $\rho = (\beta_{k-1} + \beta_k)/2$ . Dann existiert ein  $\delta \geq 0$ , so dass  $\rho + \delta$  oder  $\rho - \delta$  mit einer der Zahlen  $\alpha_k$  oder  $\alpha_{k-1}$  übereinstimmt. O.B.d.A. sei  $\rho + \delta = \alpha_k$ . Dann erhalten wir mit Lemma 1

$$\mathcal{S}\{\beta_1, \dots, \beta_{k-2}, \alpha_k, \rho - \delta, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n\} \leq \mathcal{S}\{\beta\},$$

und Lemma 2 impliziert aus der Induktionsvoraussetzung (mit  $n-1$  Variablen)

$$\mathcal{S}\{\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n\} \leq \mathcal{S}\{\beta_1, \dots, \beta_{k-2}, \rho - \delta, \beta_{k+1}, \dots, \beta_n\}$$

die Behauptung. □

**Beispiel 10** Man zeige

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a^8 + b^8 + c^8}{(abc)^3}$$

für alle  $a, b, c > 0$ .

*Lösung.* Dazu multiplizieren wir beide Seiten mit  $(abc)^3$  und erhalten die Ungleichung  $\mathcal{S}\{3, 3, 2\} \leq \mathcal{S}\{8, 0, 0\}$ . Mit  $(3, 3, 2) \prec (8, 0, 0)$  folgt aus dem Satz von Muirhead die Behauptung. □

### 3 Aufgaben

**Aufgabe 1** Man zeige, dass für ein symmetrisches Polynom  $f(x, y)$  aus  $(x - y) | f(x, y)$  stets  $(x - y)^2 | f(x, y)$  folgt.

**Aufgabe 2** Man zeige, dass  $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$  genau dann gilt, wenn für die elementarsymmetrischen Polynome  $\sigma_1 > 0, \dots, \sigma_n > 0$  gilt.

**Aufgabe 3** Man beweise für alle positiven reellen Zahlen  $a, b, c, d$  die Ungleichung

$$abc + bcd + cda + dab \leq a^3 + b^3 + c^3 + d^3.$$

**Aufgabe 4** Seien  $x_1$  und  $x_2$  Lösungen von  $x^2 + ax + bc = 0$  und  $x_2$  und  $x_3$  Lösungen von  $x^2 + bx + ac = 0$ . Zeige daß, falls  $ac \neq bc$ , die  $x_1$  und  $x_3$  die Lösungen von  $x^2 + cx + ac = 0$  sind.

**Aufgabe 5** Man bestimme alle reellen Lösungen von

$$\sqrt[4]{97 - x} + \sqrt[4]{x} = 5.$$

(Hinweis: Transformation in ein Gleichungssystem)

### Literatur

- [1] <http://www.math4u.de>
- [2] Arthur Engel. *Problem Solving Strategies*. Springer-Verlag New York 1998
- [3] Paul Zeitz. *The Art and Craft of Problem Solving*. John Wiley & Sons, 1999
- [4] <http://www.wurzel.org>
- [5] <http://www.mathematik-olympiaden.de>

### Attribution Section

wirth (Mar 2006): Contributed to KoSemNet