Höhere Mathematik für technische Studiengänge

Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Differentialrechnung für eine Veränderliche

1. Untersuchen Sie mit Hilfe des Grenzwertes des Differenzenquotientes die Funktion $f(x)$ auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x = x_0$.

   a) $f(x) = x\sqrt{x^2}$, $x_0 = 0$; b) $f(x) = \sqrt{1 - |x-2|}$, $x_0 = 2$;

   c) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x - 1}{x} & , \; x \neq 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$.

2. Beweisen Sie die bekannte Ableitungsregel für $f(x) = \ln x$ durch Berechnung des Grenzwertes des Differenzenquotientes für ein beliebiges $x = x_0 > 0$.
   (*Hinweis: Bekanntlich gilt für* $a \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{t \to 0} (1 + a \cdot t)^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a$) .

3. Wie müssen die Parameter a und b gewählt werden, damit der Graph von $y - b = (x-a)^2$ an der Stelle $x_0 = 1$ differenzierbar an den Graph von $y = \ln x$ anschließt?

4. Man bestimme die 1. Ableitung folgender Funktionen:

   a) $y = (\cos \frac{\pi}{3}) \cdot \frac{1}{x^2}$ b) $y = x^3 \cdot \sqrt[4]{x^3}$ c) $y = x^2 \ln x + \frac{4}{x}$ d) $y = 3x^2 \ln x \cdot \mathrm{e}^{-x}$

   e) $y = \dfrac{2a}{a + \sqrt{x}}$ f) $y = \dfrac{\arccos x}{\arcsin x}$ g) $y = \dfrac{x \ln x}{1 + x}$ h) $y = \cos(-2x^3)$

5. Man bestimme die 1. Ableitung an der Stelle x_0:

   a) $y = \mathrm{e}^{3 \ln \sqrt[3]{1 - \sin^2 x}}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$; b) $y = \ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{1 + x^2}\right)$, $x_0 = 1$.

6. Durch Anwendung der logarithmischen Ableitung berechne man $y'(x)$:

   a) $y = (\cos x)^{x^2 + 4}$ b) $y = x^a a^x x^{\ln x}$ c) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^2 + 2}\,(2x^3 - 7)^2}{\sqrt[4]{x^3 + 7}\,(5x^2 - 4)^3\,x^4}$

7. An welcher Stelle $x \neq 0$ und unter welchem Winkel schneidet der Graph der Funktion $y = \sqrt{x}(\frac{1}{3}x - 1)$ die x-Achse? Wie lautet die Gleichung der Tangente in diesem Punkt?

8. Für welches reelle a ist die Gerade $y = 2x + a$ Tangente an die Kurve $f(x) = \ln \tan x$, $0 < x < \frac{\pi}{2}$?

9. Berechnen Sie die Grenzwerte mit Hilfe der Regel von L'HOSPITAL (a konstant):

   a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \cos 2x}{\ln \cos 3x}$ b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln(2 + 3\mathrm{e}^{ax}) + \mathrm{e}^a}{5 + 7x}$ c) $\lim\limits_{x \to \infty} 2^x \tan \dfrac{a}{2^x}$

   d) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\dfrac{x \ln x - 1}{\ln x} - \dfrac{x - 2}{x - 1} \right)$ e) $\lim\limits_{x \to 0+0} \left(\dfrac{1}{\sin x} \right)^{\frac{1}{\ln x}}$ f) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

10. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{5}{6} + 3x - 2\sinh(4x+1)$.

   a) Begründen Sie, dass $f(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ *streng monoton fallend* ist.

   b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ (von unten) *konvex* bzw. *konkav*, gibt es Wendepunkte?

   c) Berechnen Sie $f(-\frac{1}{4})$ und $f(0)$ und begründen Sie, dass $f(x)$ im Intervall $\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$ eine Nullstelle besitzt und dies die *einzige* Nullstelle von $f(x)$ ist.

11. Man bestimme $x_0 \in [0,1]$ so, daß die Tangente an den Graphen von $f(x) = (x-1)^2$ im Punkt $P = (x_0, y_0)$ vom ersten Quadranten ein Dreieck mit maximalem Flächeninhalt abschneidet. Wie groß ist dieser Flächeninhalt?

12. Zu drucken sind rechteckige Plakate der Breite b und der Höhe a . Aus technischen Gründen bleiben oben und unten ein Streifen von jeweils $10\,cm$, links und rechts ein Streifen von jeweils $5\,cm$ unbedruckt. Für welche Abmessungen wird für Plakate mit einer Gesamtfläche von $1\,m^2$ die *bedruckte* Fläche maximal und wie groß ist diese Fläche?

13. Berechnen Sie für $y = f(x) = C\,(1+3b)^{-2x}$, C, b positive Konstanten,

   a) die 1. Ableitung durch Anwendung der Kettenregel;

   b) die 1. Ableitung über die Ableitung der zugehörigen Umkehrfunktion;

   c) den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

   d) Wie lautet die 1. Ableitung und welcher Grenzwert $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ergibt sich für den allgemeineren Fall, daß $b = b(x) = \frac{1}{x}$ und speziell $C = 1$?

14. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

   a) Untersuchen Sie $f(x)$ bezüglich Nullstellen und Vorzeichen, Extremwerte und Monotonieverhalten, Wendepunkte und Krümmungsverhalten, Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereiches und fertigen Sie eine Skizze des Funktionsverlaufes an.

   b) Geben Sie das maximale Intervall an, auf dem die Umkehrfunktion von f existiert ! Ist die Umkehrfunktion dort auch differenzierbar ? Kann man die Ableitung der Umkehrfunktion im Nullpunkt berechnen ? Wenn ja, geben Sie ihren Wert an.

15. Für $y = \mathrm{e}^x(b - \mathrm{e}^x)$ mit $b > 0$ berechne man Nullstellen, lokale Extrema, Wendepunkte, Anstieg der Wendetangenten, das Verhalten für $x \to \pm\infty$ und fertige ein Skizze an.

16. Führen Sie für die Funktion $f(x) = \dfrac{\ln(x-a)}{(x-a)^2}$, $a \in \mathbb{R}$ eine Kurvendiskussion durch (Definitions- und Wertebereich, Symmetrie, Nullstellen, Monotonieintervalle und Extremwerte, Krümmungsverhalten (konvex/konkav) und Wendepunkte, (Grenzwert-) Verhalten im Unendlichen bzw. am Rand des Definitionsbereichs).

17. Betrachtet werde $f(x) = x + \sin x$.

    a) Untersuchen Sie $f(x)$ auf Nullstellen, Extremwerte und Monotonieverhalten, Wendepunkte und Krümmungsverhalten .

    b) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x)}{f(x)} \cdot x$.

18. Für die Funktion $y = \dfrac{\ln(ax) + 1}{x}$ mit $a \neq 0$ bestimme man den Definitionsbereich, berechne Nullstellen, lokale Extrema und Wendepunkte, untersuche das Verhalten an den Grenzen des Definitionsbereiches und fertige für $a = -2$ eine Skizze an.

19. Für $y = f(x) = 1 + \ln \dfrac{x}{2-x}$, $0 < x < 2$, berechne man die Funktionswertänderungen bei Änderung von $x_0 = 1$ auf $x = 1,1$, $x = 1,5$ bzw. $x = 1,9$ *näherungweise* (Differential) und *„exakt"* (Taschenrechner).

20. Der (gemessene) Durchmesser einer Kugel betrage $d = (50 \pm 0,1)$ cm. Zu ermitteln sind der (maximale) absolute, relative und prozentuale Fehler des (daraus berechneten) Kugelvolumens.