Höhere Mathematik für technische Studiengänge

Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Elementare Funktionen

1. Begründen Sie, ob durch folgende Vorschriften reelle Funktionen $y = f(x)$ definiert werden.

   a) $y = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{für} \quad |x| \geq 1 \\ x^2 - 1 & \text{für} \quad |x| \leq 1 \end{cases}, \ x \in \mathbb{R}$ b) $y = \begin{cases} 1\,, & \text{wenn } x \text{ durch 3 teilbar} \\ 0\,, & \text{wenn } x \text{ durch 2 teilbar} \end{cases}, \ x \in \mathbb{N}\,,$

   c) $|y - \alpha| = |x + \alpha|\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$, konstant d) $y = |x + \alpha|\,,\ \alpha \in \mathbb{R}$, konstant .

2. Weisen Sie die folgenden Eigenschaften der gegebenen Funktionen nach

   a) für $f(x) = x^2 - x$ gilt $f(x+1) = f(-x)$;

   b) für $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ gilt $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = -f(x)$ und $f\left(-\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{1}{f(x)}$;

   c) für $f(x) = \dfrac{1}{x}$ gilt $f\left(\dfrac{ab}{a-b}\right) = f(b) - f(a)$.

3. Ermitteln Sie Definitions- und Wertebereich der folgenden Funktionen $y = f(x)$. Untersuchen Sie die Funktionen auf die angegebene Eigenschaft!

   a) $y = x\sqrt{x^2} - x^2$ (Monotonie) *b)* $y = \sqrt{\ln(4x - x^2)}$ (Beschränktheit)

   c) $y = x - (2 + \sqrt{x^2 - 4})$ (Monotonie) *d)* $y = \dfrac{1}{x}(2 + \sqrt{1 - x})$

   e) $y = \sqrt{1 - x^2}$ (Symmetrie) *f)* $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

   g) $y = \sqrt{1 - |x|}$ *h)* $y = \dfrac{1}{1 - \ln|x|}$

4. Ermitteln Sie (maximalen) Definitions- und Wertebereich der folgenden Funktionen $y = f(x)$. Untersuchen Sie die Funktionen auf Periodizität und Beschränktheit.

   a) $y = \cos^2 3x + 1$ b) $y = (\cos 3x + 1)^2$ c) $y = \ln(2\sin^2 x + 1)$

5. Skizzieren Sie den Kurvenverlauf von

   a) $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ b) $y = |\sin(x - \frac{\pi}{2})|$ c) $y = \sin|x - \frac{\pi}{2}|$

   d) $y = \sin 2x$ e) $y = 2\,\sin 2x$ f) $y = \sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

6. Bezüglich welcher Intervalle sind die Funktionen f und φ identisch?

   a) $f(x) = \sin x \ , \quad \varphi(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$ b) $f(x) = \cos x \ , \quad \varphi(x) = \cos(-x)$

   c) $f(x) = 2\sin(-x)\cos(-x) \ , \quad \varphi(x) = -\sin 2x$

7. Lösen Sie die Gleichungen

   a) $\tan(2x+2) = 1$ b) $(4\cos^2 x - 1)\sin x = 1$ c) $\mathrm{e}^{x^2 - 2\sqrt{x^2}} - \frac{1}{e} = 0$

8. Zeigen Sie für $x \in [-1; 1]$ die Gültigkeit der Beziehungen

   a) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ b) $\arccos(-x) + \arccos x = \pi$

9. Berechnen Sie die Umkehrfunktionen $y = f^{-1}(x)$ für

   a) $y = f(x) = x\sqrt{x^2}$ b) $y = f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$

10. Für den Einschaltvorgang in einem Stromkreis mit Gleichstromquelle, Widerstand R und Induktivität L gilt für das Zeitgesetz des Einschaltstromes $i_L(t) = I_0\,(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ und für das Zeitgesetz der Selbstinduktionsspannung $u_L(t) = U_0\, e^{-\frac{t}{\tau}}$ mit der Ausgangsspannung U_0, dem Endwert $I_0 = \frac{U_0}{R}$ und der Zeitkonstanten $\tau = \frac{L}{R}$.
    Verifizieren Sie, daß die Stromstärke bei $t = \tau$ ca. 63% des Endwertes erreicht hat. Wann erreicht die Stromstärke 95% des Endwertes und auf wieviel % der Ausgangsspannung ist die Selbstinduktionsspannung dann gesunken. Skizzieren Sie die Kurvenverläufe.

11. Für die gegebenen Parameterdarstellungen $x(t)\ ,\ y(t)\ ,\ t \in \mathbb{R}$ bestimme man die Wertebereiche von $x(t)\ ,\ y(t)$ sowie die zugehörigen *parameterfreien* Kurvengleichungen (in der Ebene).

    a) $x(t) = 1 + t \ , \quad y(t) = 1 + t^2$ b) $x(t) = t^2 - 2t + 3 \ , \quad y(t) = t^2 - 2t + 1$

    c) $x(t) = \cos 2t \ , \quad y(t) = \sin^2 t$ d) $x(t) = \cos 2t \ , \quad y(t) = \sin t$

    Beschreiben bzw. skizzieren Sie die enstehenden Kurven in der x-y-Ebene, wie werden die Kurven von einem Punkt $P(x, y)$ in Abhängigkeit von $t \in \mathbb{R}$ durchlaufen, wenn t von $-\infty$ nach $+\infty$ läuft?

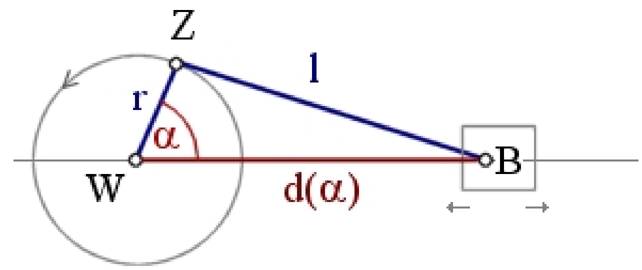
12. Ermitteln Sie auf der Grundlage seiner Darstellung $r = r(\varphi)$ in Polarkoordinaten eine Parameterdarstellung $x(\varphi)\ ,\ \ y(\varphi)$ des Kreises mit dem Radius a um den Mittelpunkt $(a, 0)$.

13. Die nachstehenden ebenen Kurven sind in ihrer *Polarkoordinaten*-Darstellung $r = r(\varphi)$ gegeben. Veranschaulichen Sie den Kurvenverlauf im *Kartesischen* Koordinatensystem und geben Sie eine Parameterdarstellung $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$ der Kurve an.

    a) $r = 2a(1 + \cos\varphi)$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $a > 0$ (Kardioide).

    b) $r = a\,\varphi$, $\varphi \in [0; 2\pi\, k]$, $a > 0$ (Archimedische Spirale, k Umläufe).

14. Bei einem Schubkurbelgetriebe treibt der Kolben über den Kolbenbolzen B und die Schubstange der Länge l den Kurbelzapfen Z an und bewirkt eine Drehung der Kurbelwelle W. Der Kurbelzapfen besitze den Abstand r zur Kubelwelle. Berechnen Sie den Abstand $d(\alpha)$ der Kurbelwelle vom Kolbenbolzen in Abhängigkeit vom Drehwinkel α.



15. Die Endpunkte A und B eines Doppelschiebers der Länge l werden längs zweier senkrechter Geraden geführt. Bestimmen Sie die Gleichung der Bahnkurve eines Punktes P der sich im Abstand $d \in (0; l)$ von A auf dem Schieber befindet,

    a) in Parameterdarstellung

    $x = x(\alpha)$, $y = y(\alpha)$, $\alpha \in [0; 2\pi]$

    und durch Elemination des Parameters

    b) als Gleichung $F(x, y) = const.$ in kartesischen Koordinaten.