Höhere Mathematik für technische Studiengänge

Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Folgen reeller Zahlen

1. Ermitteln Sie ein allgemeines Glied a_n einer Zahlenfolge derart, daß sich die ersten fünf Glieder wie folgt ergeben:

   a) $2, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \ldots$ b) -2 , -5 , -8 , -11 , -14... ,

   c) $\frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \ldots$ d) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

2. Untersuchen Sie die angegebenen Zahlenfolgen $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, auf Monotonie, Beschränktheit, Konvergenz und ermitteln Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

   a) $\frac{2n+1}{n}$ b) $\frac{2n}{n^2+1}$ c) $a_n = \frac{1}{2}\left((a-b)+(-1)^n(a-b)\right)$ d) $a_n = 1 + 2^n + (-2)^n$

   e) $a_n = \begin{cases} 1-\frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \\ 1+\frac{1}{n}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$ f) $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für $n > 1$.

3. Bestimmen Sie $n_0 \in N$ derart, daß für alle Folgeglieder a_n mit $n \geq n_0$ stets gilt $|a_n - g| < 10^{-5}$.

   a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$, $g = 1$ b) $a_n = \frac{2-4n-12n^2}{3n^2}$, $g = -4$ c) $a_n = \frac{1+\sqrt{n}}{n^3}$, $g = 0$

4. Bestimmen für Sie die nachstehend durch ihr allgemeines Glied gegebenen Zahlenfolgen den Grenzwert oder begründen Sie deren Divergenz:

   a) $a_n = -2 + 0,5n$ $b_n = -2 + (-1)^n\, 0,5n$ $c_n = -2 + 0,5^n$
   $d_n = -2 + (-0,5)^n$

   b) $a_n = \frac{n^2}{(n+1)^2}$ $b_n = (-1)^n \frac{3n^2-3}{2(n-3)^2}$ $c_n = (-1)^n \left(\frac{1}{n} - (-1)^{n+1}\right)$

   c) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n$ $b_n = \frac{1}{2n}(3\sqrt{n} - 1)^2$ $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-2}$
   $d_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n-2}$

   d) $a_n = \frac{3^n + 6^n}{3^n + 6^{n+1}}$ $b_n = \frac{3^n + (-3)^n}{2^{2n}}$ $c_n = \frac{3^n + (-3)^n}{3^{n+1}}$
   $d_n = \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $q \neq 0$; 1

   e) $a_n = \left(1 + \ln\frac{1}{2}\right)^{2n}$ $b_n = (1 + \ln 2)^{n+1}$

   f) $a_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{100}$ $b_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{2n}$ $c_n = \left(1 - \frac{1}{3n}\right)^{2n}$
   $d_n = \left(1 + \frac{4}{n-1}\right)^{n+4}$

5. Untersuchen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^n$ in Abhängigkeit von dem *reellen* Parameter $x \neq 1$.

6. Weisen Sie durch Abschätzung der Folgeglieder nach unten und nach oben (*Vergleichskriterium*) nach, daß

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$.

   Unterscheiden Sie die Fälle $a \geq 1$ und $a < 1$. Bekannt ist außerdem $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n} = 3$. *Hier läßt sich das Ergebnis aus a) anwenden.*

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$. *Hilfreich ist die Umformung* $\ln(n+1) = \ln\left(n\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$.

7. a) Zeigen Sie, daß die rekursive Folge $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot a_n$, $a_1 = \frac{1}{2}$, ab einem (zu bestimmenden) n_0 streng monoton fällt und bestimmen Sie den Grenzwert.

   Hinweis: Für Folgen mit positiven Gliedern ist $a_{n+1} < a_n \Leftrightarrow \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

   b) Zeigen Sie, daß die rekursive Folge $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}\, a_n\,(1 - a_n)$, $a_1 \in (0;1)$, streng monoton wächst und durch 1 nach oben beschränkt ist. Bestimmen Sie den Grenzwert.