Höhere Mathematik für technische Studiengänge

Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Funktionenreihen

1. Untersuchen Sie die folgenden Potenzreihen auf Konvergenz. Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{n^n}\, x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n-1}\, x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n\, x^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

2. Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der Reihen

   a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x-\pi)^k}{k(k+1)}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{x^{2k-1}}{2k-1}$ c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^k}{k+3}$

3. Entwickeln Sie $f(x) = \cos^2 x$ an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$ in einer Taylorreihe.
   Hinweis:
   Fassen Sie die erste Ableitung mittels Doppewinkelformel zu einer Winkelfunktion zusammen, um für höhere Ableitungen die Produktregel zu vermeiden!

4. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = (x+1)\sinh x$. Berechnen Sie zunächst die ersten 4 *nichtverschwindenden* Glieder der Potenzreihenentwicklung $\sum a_k\, x^k$ von $f(x)$ in $x_0 = 0$ und versuchen Sie anschließend, eine allgemeine Darstellung für die Koeffizienten a_k zu finden.

5. Entwickeln Sie $f(x) = \dfrac{2}{2-x}$ in $x_0 = 0$ in einer Potenzreihe und bestimmen Sie deren Konvergenzbereich.

6. Gegeben ist die Funktion $y = f(x) = \sinh^2 x + 1$.

   a) Berechnen Sie die ersten 4 *nichtverschwindenden* Glieder der Taylorreihenentwicklung von $f(x)$ in $x_0 = 0$! (Verwenden Sie Formeln für *doppelte* Argumente, um Ableitungen zu vereinfachen !!!)

   b) Geben Sie durch einfache Verallgemeinerung der Rechnungen aus (a) den allgemeinen Koeffizienten a_n der Potenzreihenentwicklung $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ an.

   c) Bestimmen Sie die Potenzreihe von $f(x)$ in $x_0 = 0$ unter Verwendung der bekannten Reihe für e^x.

7. Aus der gegebenen Reihe $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ (Konvergenzbereich $-1 < x \leq 1$) sind

a) die Reihenentwicklung für $\ln \frac{1+x}{1-x}$ und der zugehörige Konvergenzbereich zu bestimmen,

b) mit Hilfe der unter a) bestimmten Reihe für $a, b > 0$ zu zeigen, daß

$$\ln a = \ln b + 2 \left[\frac{a-b}{a+b} + \frac{1}{3} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^5 + \ldots \right]$$

8. Entwickeln Sie $f(x) = \ln \frac{x}{\mathrm{e}^{2x}}$ für $x_0 = 1$ in einer Taylorreihe. Wie läßt sich die gesuchte Reihe aus der Reihe für $\ln(1+x)$ (siehe vorstehende Aufgabe) herleiten?

9. Bestimmen Sie für $K(x) = 1 + 2\sqrt{x}$ das Taylorpolynom 3. Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$, bestimmen Sie damit **(durch <u>exakte</u> Rechnung <u>ohne</u> Taschenrechner!)** einen Näherungswert für $K(0,984)$ und vergleichen Sie diesen mit dem unter Verwendung (der $\sqrt{\ }$-Funktion) eines Taschenrechners ermittelten Näherungswert.

10. a) Entwickeln Sie $f(x) = \frac{1}{1+x}$ in einer Taylorreihe (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$).

b) Berechnen Sie aus dem Taylorpolynom 4. Grades einen Näherungswert für $f(0,1)$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem exakten Funktionswert. Führen Sie eine betragsmäßige Abschätzung des Restgliedes $R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\vartheta)}{5!} x^5$, $\vartheta \in (0; |x|)$ durch.

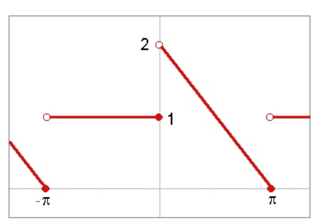
c) Bestimmen Sie die gesuchte Reihe für $f(x)$ durch Differentiation aus der bekannten Reihe für $\ln(1+x)$.

d) Durch geeignete Substitution und anschließende Integration ist aus der Reihe für $f(x)$ die Potenzreihenentwicklung für $\arctan x$ zu gewinnen.

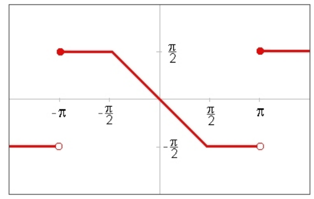
11. Entwickeln Sie $f(t) = \mathrm{e}^{-t^2}$ in einer Potenzreihe und berechnen Sie damit eine Reihendarstellung für $\int_0^1 \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t$. (*Hinweis:* Die Reihe für $f(t)$ läßt sich einfach aus der bekannten Reihe für e^x gewinnen.)

12. Die Funktion $y = f(x)$ (Skizze) sei periodisch mit 2π .

Geben Sie für $f(x)$ eine analytische Darstellung an und entwickeln Sie $f(x)$ in einer Fourier-Reihe.



13. Die Funktion $y = f(x)$ (Skizze) sei periodisch mit 2π .



Geben Sie für $f(x)$ eine analytische Darstellung an, untersuchen Sie auf Symmetrie und entwickeln Sie $f(x)$ in einer FOURIER-Reihe (bis $n = 5$).

14. a) Entwickeln Sie $f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \,, & -\pi < x \leq 0 \\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \,, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ in einer FOURIER-Reihe .

b) Welche Werte liefert die Reihe aus a) für $x = 0$ und $x = \dfrac{\pi}{4}$? Wieso stimmen diese Werte mit $f(0)$ und $f(\frac{\pi}{4})$ überein bzw. nicht überein?

c) Konstruieren Sie aus der Kenntnis der Reihensumme für $x = \frac{\pi}{4}$ eine (Zahlen-)Reihe, die selbst gegen $\frac{\pi}{4}$ konvergiert.

15. $f(x) = \begin{cases} -x - \frac{\pi}{2} \,, & -\pi \leq x < -\frac{\pi}{2} \\ 0 \,, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ x - \frac{\pi}{2} \,, & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \end{cases}$ und $f(x + 2\pi) = f(x)$

ist zu skizzieren und in einer FOURIER-Reihe zu entwickeln (bis $n = 8$).

16. $f(x) = \begin{cases} -x + 1 \,, & -\pi \leq x < 0 \\ x + 1 \,, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$,

ist zu skizzieren und in einer FOURIER-Reihe zu entwickeln.

17. Gegeben ist die 2π-periodische Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi \,, & -\pi < x < 0 \\ x - \pi \,, & 0 < x < \pi \end{cases} \quad \text{mit} \quad f(x + 2\pi) = f(x) \;.$$

a) Skizzieren Sie f im Intervall $-4\pi \leq x \leq 4\pi$.

b) Besitzt f Symmetrieeigenschaften?

c) Entwickeln Sie f in eine Fourierreihe.

d) Was lässt sich über die punktweise Konvergenz der Fourierreihe aussagen?

18. a) Ermitten Sie die FOURIER-Reihe zu der mit 2π periodischen Rechteckschwingung $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} -1 \,, & -\pi \leq x < 0 \\ 1 \,, & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

b) Entwickeln Sie aus der Lösung zu a) die FOURIER-Reihe zu der mit 2 periodischen Rechteckschwingung $\bar{f}(t)$:

$$\bar{f}(t) = \begin{cases} -1 \,, & -1 \leq t < 0 \\ 1 \,, & 0 \leq t < 1 \end{cases}$$