Höhere Mathematik für technische Studiengänge

Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Grenzwerte von Funktionen, Stetigkeit

1. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4x^3-3x^4}{5x^3-3x^5}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1}$, $n \in \mathbb{N}$

   e) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{3}{1-x^3}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^3-x^2+1}{x-1}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-x^4}{x^2+1}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1-x^2}{3x^2+1}$

2. Bestimmen Sie unter Verwendung von $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ bzw. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{a}{x}\right)^x = \mathrm{e}^a$ die Grenzwerte:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin 3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot x$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{2x^2}$

   d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{2x}\right)^{4x}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0+0} (1+\tan x)^{\cot x}$

3. Für welche $x \in \mathbb{R}$ sind die nachstehenden Funktionen stetig bzw. stetig erweiterbar („hebbar“ unstetig). Charakterisieren Sie die Art der Unstetigkeiten. Skizzieren Sie die Funktionsverläufe.

   a) $y = x + \dfrac{x+1}{|x+1|}$ b) $y = \dfrac{x^2-4x+4}{(x-2)(x+1)}$ c) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ d) $y = \dfrac{\cos x - 1}{x}$

   e) $y = \mathrm{e}^{1-\cos x}$ f) $y = \sin\dfrac{2}{x-\pi}$ g) $y = \dfrac{1}{\ln|x|}$ h) $y = 2^{\frac{1}{x}}$

4. Die Abbildung durch eine Linse genügt der Beziehung $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{g}=\dfrac{1}{f}$, dabei sind b die Entfernung des Bildpunktes von der Linse, g die Entfernung des Originalpunktes von der Linse und f die Brennweite. Man bestimme b als Funktion von g. Wo ist $b(g)$ stetig, und wie verhält sich $b(g)$ in der Nähe der Unstetigkeitsstellen?

5. Begründen Sie, daß $f(x) = 2\mathrm{e}^{-x} - \sqrt{x+2}$ genau eine Nullstelle besitzt, die zudem positiv aber kleiner als 1 ist.

6. Seien $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Ist dann auch $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(\sin^2(g(x))$ stetig?

7. Für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: f und g stetig $\implies$ $f+g$ stetig.

   Gilt umgekehrt auch $f+g$ stetig $\implies$ f und g stetig?

8. Geben Sie ein Beispiel für zwei Funktionen $f, g : [0;1] \to [0;1]$ an, die beide selbst unstetig sind, aber deren Verkettung $f(g(x))$ (*in anderer Bezeichnung:* deren Komposition $f \circ g$) stetig ist.