Höhere Mathematik für technische Studiengänge
Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Integralrechnung für eine Veränderliche

1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale durch geeignete Substitution:

a) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int 3\sqrt{7x-5}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int \cosh^3 x\,\sinh x\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2(4x+7)}$

g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(3x^2)}}$ h) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ i) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{5+\cos x}}\,\mathrm{d}x$

2. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels partieller Integration:

a) $\displaystyle\int x\cos x\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \arctan x\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int (\ln x)^2$

g) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-x}\sin x\,\mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x$ i) $\displaystyle\int \cosh^2 x\,\mathrm{d}x$

3. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mittels Partialbruchzerlegung:

a) $\displaystyle\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \frac{9x^2-2x+9}{(x-1)^2(x^2+2x+5)}\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int \frac{x^2-6}{(x-1)^3}\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \frac{4x^2+3x+10}{x^3+2x^2+5x}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int \frac{-2x^5+9x^3+4x^2-4x-7}{x^3-3x-2}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{2x^2+9x+12}{x^2+6x+10}\,\mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int \frac{3x^4}{x^4+5x^2+4}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \frac{x^4+10x^2-5x-1}{x^3-x^2+4x-4}\,\mathrm{d}x$

4. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int \sqrt{1-\cos 4x}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int x^2\cos 3x\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\sin x\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$

g) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ i) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-4x+8}}$

j) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{3x}}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x$ k) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ l) $\displaystyle\int (1-\cot^2 x)\,\mathrm{d}x$

5. Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\displaystyle\int \tan^3 x\,\mathrm{d}x$

a) mit Hilfe der Substitution $\tan x = t\ ,\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\ ;$
b) mit Hilfe der Substitution $\cos x = t\ ,\ \sin x = \sqrt{1-t^2}\ ,\ \mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\ .$
Begründen Sie, daß beide Ergebnisse gleich sind, obwohl sie nicht übereinstimmen.

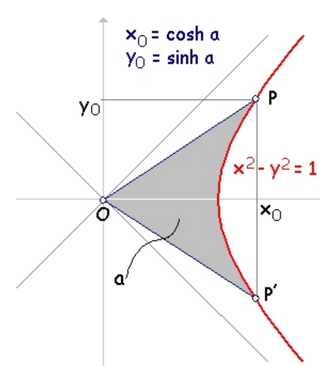
6. Berechnen Sie die bestimmten Integrale:

a) $\displaystyle\int_1^9 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_1^2 x\,\mathrm{e}^{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$

7. Berechnen Sie
a) den von der Kurve $f(x) = x^3-7x^2+10x$ und der x-Achse,
b) den von den Kurven $y = 2\sqrt{x}$ und $y = \sqrt{1-x}$
eingeschlossenen Flächeninhalt.

8. An welcher Stelle x_0 schneidet eine Senkrechte die x-Achse, wenn durch sie die Fläche unter der Kurve $y = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ zwischen $x=0$ und $x=4$ halbiert wird?

9. $P(x_0, y_0)$ und $P'(x_0, -y_0)$ $(x_0, y_0 > 0)$, seien Punkte auf der Hyperbel $x^2-y^2=1$ gemäß der nebenstehenden Skizze, $O(0,0)$ der Ursprung des Koordinatensystems und a der Flächeninhalt des von der Strecke $\overline{OP}$, der Strecke $\overline{OP'}$ und dem Hyperbelbogen zwischen P und P' eingeschlossenen Sektors. Zeigen Sie durch Anwendung der Integralrechnung zur Flächenberechnung die Richtigkeit der Beziehungen $x_0 = \cosh a$ und $y_0 = \sinh a$.



10. Berechnen Sie alle Stellen c , an denen die Funktion $y = 1 - (x-1)^2$ in $[0;2]$ nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung den entsprechenden Mittelwert annimmt. Skizzieren Sie den Sachverhalt.

11. Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurven über den angegebenen Intervallen

    a) $y = \dfrac{x^3}{12} + \dfrac{1}{x}$, $2 \le x \le 4$. b) $y = \ln \sin x$, $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

    c) $y = \arcsin \mathrm{e}^{-x}$, $\ln 2 \le x \le 1$. d) $x = t^2$, $y = 2t^3$, $0 \le t \le \frac{\sqrt{3}}{3}$.

    e) $x = \frac{1}{2}t^2$, $y = t\cosh t - \sinh t$, $0 \le t \le 1$.

12. Ein Punkt bewege sich von $O(0,0)$ bis $P(x_1, y_1)$ längs der Kurve $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ und dann auf kürzestem Weg zurück zum Ausgangspunkt.

    (a) Wie groß ist der insgesamt zurückgelegte Weg L, wenn bis zum Umkehrpunkt $\frac{14}{3}$ Längeneinheiten zurückgelegt wurden?

    (b) Wie groß ist der inhalt der „umrundeten“ Fläche A?

13. Das Kurvenstück $y = \mathrm{e}^x$, $0 \le x \le \ln 2$ rotiere (a) um die x-Achse , (b) um die y-Achse. Zu berechnen sind für (a) das Volumen und die Mantelfläche und für (b) das Volumen des entehenden Rotationskörpers.

14. Aus einer Kugel mit dem Radius R werde ein Zylinder mit dem Radius r $(r < R)$ ausgebohrt, wobei die Zylinderachse durch den Kugelmittelpunkt gehen soll. Zu berechnen sind das Volumen und die Oberfläche der durchbohrten Kugel.

15. Bestimmen Sie im Falle der Existenz den Wert der folgenden uneigentlichen Integrale:

    a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\cosh^2 x}$ c) $\displaystyle\int_{e}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$ d) $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \cos n\,x \,\mathrm{d}x$

    e) $\displaystyle\int_{0}^{a} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, $a > 0$ f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}}$ g) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 - \sin x}\,\mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int_{0}^{9} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$