Höhere Mathematik für technische Studiengänge

Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Komplexe Zahlen

1. Sei $z_1 = 1 + i$ und $z_2 = 4 - 3\,i$. Berechnen Sie $z_1 + z_2,\quad z_1 - z_2,\quad z_1 \cdot z_2,\quad z_1 \cdot \overline{z}_2,\quad z_1/z_2,\quad \overline{z}_1 + z_2,$ $z_1 - \overline{z}_2,\quad \overline{z_1 \cdot z_2},\quad \overline{z}_1/z_2,\quad z_1 + \overline{z}_2,\quad z_1^2,\ |z_1|,\quad |z_2|$ und $|z_1 - z_2|$.

2. Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil von
   a) $z = \dfrac{1+i}{1-i} + \dfrac{4\,i}{1+i} + 1$ b) $z = -\dfrac{(1+2\,i)(2-i)+3\,i-6}{(2-i)^2-2+i}$ c) $z = -\dfrac{1}{2-\frac{2}{i+1}}$

3. Für welche *reellen* c ist $z = \dfrac{1+i}{c-i}$ selbst *reell*, für welche *rein imaginär*? Welche Zahl stellt z dann jeweils dar?

4. Überführen Sie $z_1 = 1+\sqrt{3}\,i$, $z_2 = -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,i$, $z_3 = -3-3\,i$ und $z_4 = 1-i$ in die trigonometrische Form $z = r(\cos\varphi + i\,\sin\varphi)$ und in die exponentielle Form $z = re^{i\,\varphi}$ und berechnen Sie damit $z_1 \cdot z_2,\quad z_1 \cdot \overline{z}_2,\quad z_4^2,\quad \dfrac{z_1}{z_2},\quad \dfrac{z_1^2}{z_2^3 \cdot z_4}$ und z_4^7 . Das Ergebnis ist jeweils in der arithmetischen Form $z = a + b\,i$ anzugeben.

5. Bestimmen Sie *Realteil* und *Imaginärteil* der *komplexen* Zahl $z = \dfrac{2\,e^{\mathbf{i}\,\frac{\pi}{6}}}{1-\sqrt{3}\,\mathbf{i}}$

6. Beweisen Sie die Formel von John Machin (1706): $\dfrac{\pi}{4} = 4\,\arctan\left(\dfrac{1}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{1}{239}\right)$

   Hinweis: Stellen Sie die Argumente der komplexen Zahlen $z_1 = 5 + i$ und $z_2 = 239 + i$ als arctan-Werte dar und verwenden Sie die Eigenschaften der Argumente für Produkte/Potenzen bzw. Quotienten komplexer Zahlen zur Konstruktion einer dritten Zahl z so, daß die Argumente von z, z_1 und z_2 gerade die gesuchte Formel liefern.

7. Welche komplexen Zahlen erfüllen die nachstehenden Gleichungen bzw. Ungleichungen? Skizzieren Sie die Lösungsmengen in der Gaussschen Zahlenebene.
   a) $Re(z) + Im(z) = c,\ c \in R$ b) $1 \le |z-2| \le 4$ c) $\dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{\overline{z}} = 1$ d) $|z+1| \le |z-1|$

8. In welchem Bereich der GAUSSschen Zahlenebene liegen die komplexen Zahlen z, die die Ungleichung

   a) $|\,z-1\,| > |\,\bar{z}\,|$ b) $|\,i\cdot z\,| < |\,i+z\,|$ c) $Re\left(\dfrac{z+2}{z}\right) = 2$ erfüllen?

9. Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen w der Gleichung und skizzieren Sie die Lage der Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene.

   a) $2w^4 + 9 = 9\sqrt{3}\,i$ b) $(w+1)^3 - i = 0$ c) $w^6 = 1$

10. Berechnen Sie (<u>nur</u>) die komplexen Lösungen $w \in \mathbb{C}$ der Gleichung $w^8 + 1 + \sqrt{3}\,i = 0$, die im <u>ersten</u> Quadranten der Gaußschen Zahlenebene liegen und geben Sie diese in arithmetischer (algebraischer) Form an. Wieviel verschiedene Lösung besitzt die Gleichung insgesamt?

11. Berechnen Sie sämtliche komplexen Lösungen der folgenden Gleichungen:

    a) $z^2 - 8z + 65 = 0$ b) $z^2 - (3+5i)z - 16 + 4\,i = 0$ c) $(z^2 + 2\,i)^2 + 4 = 0$ d) $z^6 - 4z^3 + 8 = 0$

12. Unter Verwendung der Moivreschen Formel und des Binomischen Satzes leite man die folgenden trigonometrischen Beziehungen her: $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi$, $\cos 3\varphi = -3\cos\varphi + 4\cos^3\varphi$.

13. Durch die Anwendung der Produktformel für komplexe Zahlen in trigonometrischer Form auf das Produkt der Zahlen $z = \cos\alpha + i\,\sin\alpha$ und $w = \cos\beta + i\,\sin\beta$ leite man die Additionstheoreme für den Sinus und den Cosinus her.

14. Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften komplexer Zahlen

    a) $Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$ b) $Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2\,i}$ c) $|z| = \sqrt{z\cdot\bar{z}}$

15. Beweisen Sie (durch einfaches Nachrechnen mit $z = a + b\,i$ die folgenden Eigenschaften konjugiert komplexer Zahlen :

    a) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, $\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ b) $\overline{z_1\cdot z_2} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

16. Beweisen Sie mit Hilfe von Eigenschaften konjugiert komplexer Zahlen:
    Ist z_0 eine komplexe Lösung der Gleichung $a_n\,z^n + a_{n-1}\,z^{n-1} + ... + a_1\,z + a_0 = 0$ mit *reellen* Koeffizienten a_i , $i = 0, 1, ..., n$, so ist auch die konjugiert Komplexe $\overline{z_0}$ Lösung dieser Gleichung.