

# Höhere Mathematik für technische Studiengänge

## Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

### Lineare Gleichungssysteme, invertierbare Matrizen

1. Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungssysteme:

$$(a) \quad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -1 \\ x_1 + 6x_2 - x_3 &= 3 \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 &= -6 \end{aligned}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} &+ 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= 16 \end{aligned}$$

$$(c) \quad \begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 7x_1 - 4x_2 - x_3 &= -2 \\ -x_1 - 3x_2 - 12x_3 &= -4 \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 2 \\ 5x_2 + 17x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$(d) \quad \begin{aligned} 3x_1 &+ 6x_3 - 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 &&+ 3x_5 &= 0 \\ &x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= -2 \\ 4x_1 + 3x_2 &&&- 3x_5 &= -4 \end{aligned}$$

$$(e) \quad \begin{aligned} x_1 &- 2x_3 = -12 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= -30 \end{aligned}$$

$$(f) \quad \begin{aligned} 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Welche Lösungsmengen besitzen jeweils die zugeordneten *homogenen* Systeme?

2. Für welche reellen  $\alpha, \beta$ , ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= -4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + \alpha x_2 + 2x_3 &= -\beta \end{aligned}$$

*eindeutig lösbar, nicht lösbar, besitzt es unendlich viele Lösungen?*

Bestimmen Sie für die Fälle  $\alpha = \beta = 0$  und  $\alpha = -1, \beta = 2$  die Lösungsmengen des Systems. Für welches  $\alpha$  ist das zugeordnete *homogene* System eindeutig (nur *trivial*) lösbar?

3. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &- 2x_3 - 3x_4 = -12 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + 6x_4 &= 12 \\ 3x_1 - 2x_2 + ax_3 - 15x_4 &= -30 \end{aligned}$$

- Für welche reellen Parameter  $a$  ist das lineare Gleichungssystem *unlösbar, eindeutig lösbar*, besitzt es *unendlich vielen* Lösungen?
- Bestimmen Sie *alle* Lösungen des linearen Gleichungssystems für  $a = 5$ . Gibt es unter diesen Lösungen auch solche mit  $x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$ ?
- Bestimmen Sie *alle* Lösungen des zugehörigen *homogenen* linearen Systems für  $a = 2$ .
- Gibt es reelle Parameterwerte  $a$ , für die eine Lösung des linearen Gleichungssystems in *allen* Variablen den *gleichen* Wert besitzt?

4. Bestimmen Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + y + bz &= -1 \\ 3x + (b+1)y + (b-1)z &= -1 \\ bx + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von dem reellen Parameter  $b$ . Wie lautet die Lösung für  $b = -1$ ?

5. Berechnen Sie für die nachstehenden Matrizen die Inversen, falls diese existieren

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

berechne man die *Inverse*  $A^{-1}$ , die Lösung des *Gleichungssystems*  $Ax = b$  und die Lösung der *Matrizengleichung*  $AX = B$ . Welche Möglichkeit gibt es, die Rechnungen *simultan* und **ohne zusätzliche Matrizenmultiplikation** auszuführen?

$\bar{A}$  entstehe aus  $A$  durch Vertauschung der Spalten 1 und 2. Wie ändern sich die Lösungen, wenn  $A$  durch  $\bar{A}$  ersetzt wird?

7. Gegeben ist die Matrizengleichung  $(2A^T - X)B - AB^T = E$ , wobei  $E$  die Einheitsmatrix ist und  $B$  regulär (invertierbar) sei.

a) Lösen Sie die Gleichung nach  $X$  auf.

b) Zeigen Sie, daß für *symmetrische* Matrizen  $A, B$  gilt  $X = A - B^{-1}$ .

c) Berechnen Sie  $X$  für  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 2 \\ -6 & 12 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .