Höhere Mathematik für technische Studiengänge

Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Matrizen (Grundoperationen)

1. Man berechne (falls möglich) $A+B$, $B-A$, $3A$, $A-\frac{1}{2}B$, A^T, A^T+B, $A\,B$, $A\,C$, $A^T B$, $C^T C$ und $C\,C^T$ für die Matrizen
$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -2 \\ -4 & 0 & 6 \end{pmatrix}\quad \text{und}\quad C=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. Berechnen Sie die Produkte $A\,B$, $B\,A$, $A\,B^T$, $B\,A^T$, $A^T B^T$ für die Matrizen
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\quad \text{und}\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Berechnen Sie die Matrizenprodukte AB, BA, AO, AE und EB für
$$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 0 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},\quad O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\quad \text{und}\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Es seien A und B quadratische Matrizen und E die Einheitsmatrix des selben Typs (n,n) .
   (a) Beweisen Sie die Gültigkeit von $(AB)^2 = A^2B^2$ für den Fall, daß $AB = BA$.
   Zeigen Sie dann an einem Beispiel, daß die erste Gleichung im Allgemeinen nicht gilt.
   (b) Zeigen Sie, daß im Allgemeinen $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$. Wann gilt Gleichheit?
   (c) Vereinfachen Sie: $(2A+B)^2 - (A+\frac{1}{2}B)(4A) - (E-B)^2 - B2A + 2B(2A-E)E + E$.
   (d) Fassen Sie zusammen:
   $A^T(A+B) - B^T A - (B^T B)^T - 2(A-B)^T(A+B) + \left[(A+B)^T(A-B)\right]^T$

5. Berechnen Sie X aus der Matrizengleichung $B\cdot C^T - X^T = 2A$ für
$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 6 & -12 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Bestimmen Sie a,b,c,d aus der Matrizengleichung
$$\left[\begin{pmatrix} 4 & c \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ d & 4 \end{pmatrix}\right]^T \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. Bestimmen Sie a, b, c so, daß gilt: $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Welche Matrix X ist mit der Matrix $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vertauschbar, so dass $AX = XA$ gilt ?

9. Gegeben ist die Gleichung $AC^T + B = X + A^T B$. A besitze 5 Spalten und C 3 Zeilen. Welchen Typ müssen A, B, C und X besitzen, damit für diesen Fall die Gleichung sinnvoll ist ?

10. Ein dreifaches Matrizenprodukt läßt sich berechnen als $ABC = (AB)C = A(BC)$. Welche Berechnungsreihenfolge ist günstiger (erfordert weniger Multiplikationen und Additionen), wenn A vom Format $(4;2)$, B vom Format $(2;5)$ und C vom Format $(5;1)$ ist.