Höhere Mathematik für technische Studiengänge

Vorbereitungsaufgaben für die Übungen

Reihen reeller Zahlen

1. Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit Hilfe geeigneter Konvergenzkriterien (notwendiges Konvergenzkriterium, Quotienten-, Wurzel-, Vergleichs-, LEIBNIZ-Kriterium) auf (absolute) Konvergenz:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{1+b^n}$ $(b>0)$

   g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

2. Berechnen Sie Reihensummen: a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+2}}{3^{2k-1}}$ c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2-k}$

3. a) Begründen Sie die Konvergenz von $\displaystyle S=\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^{k-1}}{3^{2k+1}}$ und berechnen Sie S .

   b) Untersuchen Sie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2\,p)^k}{k+3}$ auf Konvergenz (in Abhängigkeit von $p \in \mathbb{R}$) .

4. Gegeben sei die Reihen a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{p^{\,2k}}{2+5k}$ und b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^{k+1}}{(2p)^k}$.

   Für welche reellen p konvergieren die Reihen?
   Berechnen Sie für die Reihe aus b) die Reihensumme für $p=3$.

5. Zeigen Sie mit Hilfe des Majorantenkriteriums, daß die alternierenden Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ mit positiven $\displaystyle a_n=\frac{3}{n^2}+(-1)^n\frac{1}{n^2}$ absolut konvergiert, obwohl die Folge a_n der Beträge ihrer Glieder keine *monotone* Nullfolge ist. (*Ein Beispiel dafür, daß das* LEIBNIZ-*Kriterium nur* hinreichend *ist.)*

6. Untersuchen Sie die folgenden Reihen mit Hilfe des Integralkriteriums auf Konvergenz:

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\ln n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2-1}$ c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n^3}$

7. Gegeben seien

   a) das Integral $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(\ln x)^3}$ und die Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\,(\ln k)^3}$;

   b) das Integral $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\,(1+\ln x)}$ und die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(1+\ln k)}$.

   Untersuchen Sie für a) und b) das Integral auf Konvergenz. Was bedeutet das Ergebnis für die Konvergenz der jeweils zugeordneten Reihe ?