

Fourier-Reihen (1)

$f(t)$ stückweise stetig für $t \in [0, T]$

(periodisch oder periodisch fortgesetzt mit $f(t + T) = f(t)$)

FOURIER-Reihe: $F_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t\}$

Kreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

FOURIER-Koeffizienten:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t \, dt \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin k\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t \, dt \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Speziell $T = 2\pi$, $f(x)$ periodisch mit 2π ($\Rightarrow \omega = 1$)

$F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos kx + b_k \sin kx\}$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Transformation einer T -periodischen Funktion $f(t)$ in eine 2π -periodische Funktion $\tilde{f}(x)$ durch Substitution

$$t = \frac{T}{2\pi} x \quad , \quad \tilde{f}(x) = f\left(\frac{T}{2\pi} x\right) \quad , \quad f(t + T) = f(t) \Rightarrow$$

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi} (x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi} x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi} x\right) = \tilde{f}(x)$$

Fourier-Reihen (2)

Exponentielle Form der FOURIER-Reihe:

Umformung mittels EULERScher-Formel

$$e^{i k \omega t} = \cos(k \omega t) + i \sin(k \omega t) \quad \text{bzw.} \quad e^{-i k \omega t} = \cos(k \omega t) - i \sin(k \omega t)$$

$$\begin{aligned} F_f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k \omega t) + b_k \sin(k \omega t)\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k}{2} (e^{i k \omega t} + e^{-i k \omega t}) + \frac{b_k}{2i} (e^{i k \omega t} - e^{-i k \omega t}) \right\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{a_k - i b_k}{2} e^{i k \omega t} + \frac{a_k + i b_k}{2} e^{-i k \omega t} \right\} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k + i b_k}{2} e^{-i k \omega t} + \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - i b_k}{2} e^{i k \omega t} \\ &= \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{a_{-k} + i b_{-k}}{2} e^{i k \omega t} + \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - i b_k}{2} e^{i k \omega t} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i k \omega t}$$

$$\text{mit } c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{a_k - i b_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + i b_k}{2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{bzw. } a_0 = 2, \quad a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = (c_k - c_{-k}) i, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Fourier-Reihen (3)

Konvergenz der FOURIER-Reihe:

$f(x)$ 2π -periodisch und stückweise stetig differenzierbar \Rightarrow

die FOURIER-Reihe $F_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$

konvergiert punktweise für alle $x \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$F_f(x) = \begin{cases} f(x) & , \text{ wenn } f(x) \text{ stetig in } x, \\ \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & , \text{ wenn } f(x) \text{ unstetig in } x. \end{cases}$$

Die Konvergenz ist gleichmäßig in allen beschränkten und abgeschlossenen Intervallen $[a, b]$, in denen $f(x)$ stetig ist.

In allen Unstetigkeitsstellen überschwingen die Partialsummen

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \{a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\}$$

für große n den Sprung um ca. 17,89 % .

(GIBBS-sches Phänomen)
