V sei ein **Linearer Vektorraum**

Linearkombination: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \vec{v}_i \quad , \quad \vec{v}_i \in V \; , \quad \alpha_i \in \mathbb{R}$

Lineare Hülle: $\mathrm{Lin}\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_k) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \vec{v}_i \middle| \; \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k \right\}$

Lineare Unabhängigkeit: $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, \vec{v}_i = \vec{0} \; \Rightarrow \; \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_k = 0$

Basis: System *linear unabhängiger* Vektoren $(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_n)$ mit
$V = \mathrm{Lin}\,(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \ldots, \vec{v}_n)$ (Erzeugendensystem)

- jedes $\vec{v} \in V$ durch die Basis als LK *eindeutig* darstellbar
- m Vektoren aus V stets *linear abhängig*, wenn $m > n$
- Zahl n der Vektoren in *jeder* Basis gleich: **Dimension** von V

Speziell $V = \mathbb{R}^n = \left\{ \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n \right\}$

- $\mathrm{Dim}\;(\mathbb{R}^n) = n$
- n *linear unabhängige* Vektoren bilden eine Basis
- Einheitsvektoren $\vec{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$ ergeben *natürliche* Basis

---

Rang einer $(m \times n)$-Matrix $A = (\vec{a}_1 \, \vec{a}_2 \, \ldots \, \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} \vec{z}_1 \\ \vec{z}_2 \\ \vdots \\ \vec{z}_m \end{pmatrix}$

$\mathrm{Lin}\,(\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n)$ Spaltenraum , $\mathrm{Lin}\,(\vec{z}_1, \ldots, \vec{z}_m)$ Zeilenraum

$$\mathrm{rang} A \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Dim}(\mathrm{Lin}\,(\vec{a}_1, \vec{a}_2 \ldots, \vec{a}_n)) = \mathrm{Dim}(\mathrm{Lin}\,(\vec{z}_1, \vec{z}_2 \ldots, \vec{z}_n)) \leq \min\{m, n\}$$

$=$ Maximalzahl *linear unabhängiger* Zeilen [Spalten] von A

(*Denn jeder Vektor des (z.B.) Spaltenraumes ist als Linearkombination eines* maximalen *Systems* linear unabhängiger *Spalten* (Basis) *darstellbar. Andernfalls wäre er von diesen* linear unabhängig *und System damit nicht* maximal *!*)