

Partialbruchzerlegung

für **echt** gebrochen rationale Funktionen

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad (\mathbf{n} < \mathbf{m})$$

(Reelle) Faktorisierung der Nennerfunktion $Q_m(x)$ (Nullstellen!):

$$Q_m(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_l x + q_l)^{\beta_l},$$

mit Linearfaktoren zu α_i -fache **reelle** Nullstellen x_i , quadratische Faktoren zu β_j -fachen **konjugiert komplexen** Nullstellen bei $\frac{p_j^2}{4} - q_j < 0$.

Ansatz für die Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} &= \frac{A_{11}}{x - x_1} + \frac{A_{12}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \\ &+ \dots \\ &+ \frac{A_{k1}}{x - x_k} + \frac{A_{k2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x - x_k)^{\alpha_k}} \\ &+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_{12}x + C_{12}}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{B_{1\beta_1}x + C_{1\beta_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}} + \\ &+ \dots \\ &+ \frac{B_{l1}x + C_{l1}}{x^2 + p_lx + q_l} + \frac{B_{l2}x + C_{l2}}{(x^2 + p_lx + q_l)^2} + \dots + \frac{B_{l\beta_l}x + C_{l\beta_l}}{(x^2 + p_lx + q_l)^{\beta_l}} \end{aligned}$$

Bestimmung der unbekanntenen Koeffizienten $A_{i\nu}, B_{j\mu}, C_{j\mu}$ z.B. durch **Lösung eines linearen Gleichungssystems**, gewonnen aus dem **Koeffizientenvergleich** von $P_n(x)$ mit dem Polynom, welches aus der Multiplikation des Partialbruchansatzes mit $Q_m(x)$ entsteht.

Integration der Partialbrüche:

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \ln |x-a|$$

$$\int \frac{A}{(x-a)^\alpha} dx = -\frac{A}{(\alpha-1)(x-a)^{\alpha-1}} \quad \alpha = 2, 3, \dots$$

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx = \frac{B}{2} \ln(x^2+px+q) + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right) \quad (p^2-4q < 0 \ !)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^\beta} dx &= -\frac{B}{2(\beta-1)(x^2+px+q)^{\beta-1}} \\ &+ \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\beta} \quad \beta = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\beta} &= \frac{2x+p}{(\beta-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{\beta-1}} \\ &+ \frac{4\beta-6}{(\beta-1)(4q-p^2)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{\beta-1}} \quad \beta = 2, 3, \dots \end{aligned}$$